

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estatística de tempo de espera para uma cavidade óptica acoplada com um ponto quântico duplo

Luis Felipe Santos da Silva

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi - Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Dr. Pedro Eduardo Harunari - Université de Luxembourg

Prof. Dr. - Raphael Campos Drumond - Universidade Federal de Minas Gerais

São Paulo
2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Luis Felipe Santos da

Estatística de tempo de espera para uma cavidade óptica acoplada com um ponto quântico duplo. São Paulo, 2023.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física dos Materiais e Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi.

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Informação quântica.

USP/IF/SBI-067/2023

University of São Paulo
Physics Institute

Waiting time statistics for an optical cavity coupled with a double quantum dot

Luis Felipe Santos da Silva

Supervisor: Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi - Physics Institute of the University of São Paulo

Dr. Pedro Eduardo Harunari - University of Luxembourg

Prof. Dr. Raphael Campos Drumond- University of Minas Gerais

São Paulo
2023

“Ela vive, ela existe, e em seu estado mais puro, entre a classe de homens que denominamos incultos e nos parecem tão brutos às vezes. E nós somos instruídos... instruídos para nada!”

— *Os Sofrimentos do Jovem Werther*, J. W. Goethe

Aos burocratas

Resumo

O formalismo de sistemas quânticos abertos tem se tornado cada vez mais popular para a análise de problemas físicos, uma vez que nos permite construir modelos mais realistas via inclusão de um ambiente externo que influencie na dinâmica de um sistema de interesse. Dentre as infinitas possibilidades, dois modelos que vêm sendo efervescentes nos últimos anos são o ponto quântico duplo e a cavidade óptica. O primeiro é visto como um sistema fermiônico, por permitir a entrada e saída de elétrons, enquanto o segundo tem natureza bosônica, por permitir a injeção e a ejeção de fótons. O acoplamento dessas duas entidades dá origem a um sistema composto rico em aplicações empíricas, muito no que diz respeito à detecção de fótons isolados. Tendo isso em vista, esse trabalho buscou introduzir a abordagem da estatística de tempo de espera para esse tipo de acoplamento, uma vez que esse tipo de formalismo nos permite extrair explicitamente (e analiticamente) probabilidades de ocorrência de certos fenômenos dissipativos em sistemas quânticos. Assim, quantidades como a probabilidade de um fóton contido em uma cavidade óptica vaziar ou interagir com o ponto quântico duplo foram calculadas para diferentes cenários, o que nos permitiu analisar sob quais condições podemos esperar certa predominância de interação no modelo. Além disso, a comparação entre os diferentes cenários nos permitiu inferir uma hierarquia entre as probabilidades de ocorrência dos possíveis eventos, o que caracteriza por completo o cenário em questão. Tais resultados podem ser vistos como um próximo passo natural daqueles obtidos anteriormente na literatura, via estatística de contagem total.

Palavras chaves: Sistemas Quânticos Abertos; Ponto Quântico Duplo; Cavidade Óptica; Estatística de Tempo de Espera; Distribuição de Tempo de Espera.

Abstract

The formalism of open quantum systems has gained increasing popularity in the analysis of physical problems, as it allows us to construct more realistic models by incorporating an external environment that influences the dynamics of the system of interest. Among the myriad of possibilities, two models that have been particularly prominent in recent years are the double quantum dot and the optical cavity. The former is regarded as a fermionic system, permitting the entry and exit of electrons, while the latter exhibits a bosonic nature, enabling the injection and ejection of photons. The coupling of these two entities gives rise to a composite system with diverse empirical applications, particularly in the detection of isolated photons. In light of this, our work aims to introduce the approach of waiting time statistics to study this type of coupling. This formalism allows us to extract explicit (and analytical) probabilities of certain dissipative phenomena in quantum systems. Consequently, we have calculated quantities such as the probability of a photon contained in an optical cavity leaking or interacting with the double quantum dot under different scenarios. This analysis enables us to identify conditions that promote a certain predominance of interaction in the model. Furthermore, by comparing various scenarios, we infer a hierarchy of occurrence probabilities for the different events, thus fully characterizing the scenario under investigation. These results represent a natural progression from the findings previously reported in the literature, which relied on full counting statistics.

Keywords: Open Quantum Systems; Double Quantum Dot; Optical Cavity; Waiting Time Statistics; Waiting Time Distribution.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro durante esses dois anos de mestrado. Foram tempos hostis para a educação e a ciência do país, muita mutreta pra levar a situação, mas a gente foi levando de teimoso e de pirraça.

Agradeço ao meu orientador Gabriel Teixeira Landi, pela incrível orientação durante todo o meu mestrado. Cada reunião de cinco minutos que se transformavam (e ainda se transformam!) em uma discussão de horas tem um lugar especial em meu coração, não só pelo aprendizado que elas trouxeram, mas por quão divertidas elas foram. Para mim, esse trabalho é apenas um vestígio dessas nossas discussões, sendo minha construção como um possível mestre feita na sua sala (física ou virtual). Obrigado por ter sido atencioso não só com nosso trabalho, mas também com toda a burocracia por trás disso tudo, mesmo quando fisicamente distante. Espero que possamos colaborar muito mais vezes no futuro, pois “mesmo que o tempo e a distância digam ‘não’, mesmo esquecendo a canção, o que importa é ouvir a voz que vem do coração”. Pelo menos era o que falava uma canção que na América ouvi.

Ao meu amigo, professor e mentor Mario Cesar Baldiotti, por estar ativamente presente durante minha evolução não só como um físico, mas como pessoa. Mais especificamente, ousou dizer que não existe sequer uma faculdade intelectual minha em que Mario Cesar Baldiotti não tenha feito uma contribuição relevante. Obrigado por sempre manter minha mente afiada e, apesar de já ter vivido boa vida, ter dito até um bangalô, cobertor, comida, roupa lavada, a vida certamente ainda não te levou.

Ao meu grande amigo e confidente Victor Hugo Marques Ramos, por estar integralmente presente em toda a etapa de meu mestrado, desde as discussões sobre Física até as dúvidas sobre quando colocar crase nas letras “a” desse texto. É indiscutível como, mesmo tendo muitas diferenças, somos complementares um ao outro. De fato, não há nada que justifique melhor essa sintonia do que o truísmo de que você é você e eu sou eu. Te agradeço por compartilhar da solidão comigo, das ideias mirabolantes, das vivências atípicas e, claro, por sempre estar disposto a fazer samba e Física até mais tarde, mesmo que tenhamos muito sono de manhã.

À minha saudosa amiga Lara Menck Toginho, pela amizade e carinho ao longo desses anos. Mesmo não participando ativamente da minha vida acadêmica, sua presença na minha vida é um agente positivo no meu bem estar, de modo que não posso ignorá-la aqui. Obrigado pelos momentos insubstituíveis ao longo desses anos, por simpatizar com meus gostos peculiares de passeios e, é claro, por sempre se mostrar atenciosa e colaborativa nos meus infinitos discursos sobre a morte e suas implicações materiais. Me impressiona e me enche de satisfação o fato de termos trilhado caminhos tão diferentes, mas ainda mantermos uma relação tão sólida e indispensável. Talvez seja porque seu All Star azul

combine com o meu preto de cano alto.

À minha maior fã Gabrielle de Oliveira Leão, pelo carinho e senso de humor que rechearam meus dias ao longo desses anos. Em especial, agradeço pelas inúmeras ajudas em aspectos pontuais dessa dissertação e em outras questões acadêmicas, principalmente no tocante ao inglês. Você sempre tem uma ideia para melhorar minhas frases e os passeios mais esquisitos para melhorar meu humor. Obrigado pelas pulseiras da amizade e pelos momentos que passamos juntos, sem medo.

À minha exímia amiga Rebeca Menck Toginho, pela amizade e confiança que há muito tem me mostrado. Nossos encontros e trocas de histórias sempre são recheadas de bom humor e, mesmo eu não crendo, arrisco dizer que é um banho para a alma. Obrigado por me garantir esses pequenos deleites da vida que só uma amizade como a sua pode garantir. Embora você não participe explicitamente do meu mundo acadêmico, suas contribuições para o meu eu fora desse mundo são relevantes demais para serem ignoradas. E sim, eu sei que as vezes uso palavras repetidas, mas quais são as palavras que nunca são ditas?

À minha amiga Amanda “Amandolinha” Fonseca, por ser minha parceira na Física desde meu ingresso no curso na Universidade Estadual de Londrina, até a pós aqui na Universidade de São Paulo. Sua inteligência, companheirismo, senso de humor e, principalmente, paciência foram potencializadores em minha jornada. Obrigado por embarcar em vários grupos de estudo comigo, desde inglês à Informação Quântica, que, por mais que nunca concluídos, sempre agregaram bastante para meu crescimento. Espero que tenhamos muito mais anos de colaboração pela frente, e que nessa terra de gigantes, não sejamos apenas uma banda numa propaganda de refrigerante.

Aos meus companheiros de graduação Lucas Queiroz Silveira e Giovanna Pimenta Barbarino, cujas vivências e discussões ecoam até hoje no físico que sou. À Giovanna, em especial, por ter participado integralmente de minhas metamorfoses durante a graduação, estando presente e muitas vezes sendo a responsável por momentos maravilhosos dessa época. Por mais que no futuro possamos não ter contato direto, você e eu vamos viver pra sempre.

Aos meus companheiros de pós graduação Ana Camila Costa Esteves, Bianca Carvalho de Oliveira, Danilo Cius, Gustavo Henrique dos Santos Silva, Gustavo Balvedi Pimentel, Henrique Ay Casa Grande, Lucas Ker Soares Dias, Lui Zuccherelli de Paula, Naim Elias Comar, Rafael Grossi e Fonseca, Roberto Dobal Baldijão e Vinícius Bruno Bet Ader, por terem me acompanhado ao longo dessa fase e por ter me aguentado em tantas discussões de Física. Vocês entendem e compartilham comigo os benefícios e malefícios da escolha de uma vida acadêmica, sempre me lembrando de que a abelha fazendo o mel, vale o tempo que não voou.

Aos meus amigos do Grupo de Teatro da Poli (GTP) Caíque Cavalcante e Pachá, Hilary Henrique do Nascimento, Isabela Mosna Esteves, Júlio Moura, Lucas Yohan Salles, Mariana Mendes Lima e Néia Barbosa, cujo carinho e experiências conjuntas me trouxeram marcas positivas que vou levar para a minha vida. Esse grupo foi, sem dúvidas, um dos meus maiores achados na Universidade de São Paulo, sendo responsável por momentos completamente atípicos aqueles do meu cotidiano acadêmico, trazendo uma carga intelectual e sensorial revigorantes para o meu eu. Agradeço particularmente a Isabela pela mente criativa que cem por cento das vezes levou nossas discussões para caminhos não triviais, enriquecendo muito minha forma de ver as coisas em diferentes aspectos da

vida. Quando chegar a hora de me despedir dessa universidade, na parede da memória, a lembrança de vocês e desse grupo será o quadro que doerá mais.

Ao meu amigo de longa data que guardo do lado esquerdo do peito, Leonardo Bazzo Cordeiro, pelo companheirismo, amizade, confiança e, no medo de deixar de fora algum aspecto positivo, todas as demais coisas que uma amizade de uma vida pode oferecer. Partilhamos tanto da nossa existência um com o outro que as vezes sinto que não te incluir nos agradecimentos soaria como um pecado para algum deus. Obrigado por estar comigo literalmente durante toda a minha formação como indivíduo, mesmo não tendo nada a ver com Física e com essa dissertação não passando de uma sopa de letrinhas pra você. Em algum momento passado, presente e futuro deixaram de ter sentido no que diz respeito a nossa amizade, de sorte que tenho alguma certeza que nossa relação é simétrica por translações temporais. Isso e o fato de você continuar sendo meu freguês em todos os jogos. Obrigado, meu caro, e lembre-se sempre das palavras que proferi: amigo, estou aqui.

Ao meu irmão e melhor amigo Carlos Roberto da Silva Junior. Sendo bem sincero, eu nem sei o que agradecer. Pela participação ativa no meu desenvolvimento desde o zero até os meus vinte e quatro anos de idade (e contando)? Pelo ombro amigo em toda e qualquer crise que eu sentisse necessidade de partilhar contigo? Pela ajuda emocional e financeira sempre feita de bom grado não só ao longo do meu mestrado, mas ao longo da minha vida inteira? Pelas incríveis pizzas que só o padeiro número um de Assis e região é capaz de fazer? Sinceramente, é injusto, impreciso e desnecessário tentar colocar em forma de lista o tanto que sou grato pela sua existência. Obrigado, meu irmão. Seu zelo é tamanho que mesmo hoje me sinto livre para ser criança e acreditar que o dia vai raiar, só porque uma cantiga anunciou.

Por último (e certamente a mais importante), quero agradecer minha mãe, Antonia Fernandes dos Santos. Não passa de um truísmo dizer que a senhora atuou e vem atuando como uma espécie de alicerce que sustenta minha jornada. É uma estranha sensação de não ter medo de falhar com meus objetivos pessoais por ter a segurança de ter onde cair, mas ao mesmo tempo não querer falhar comigo mesmo em hipótese alguma por meu sucesso estar (estranhamente) associado com a sua felicidade. Eu não entendo esses sentimentos, muito menos consigo justificar eles com toda a Física que aprendi nos últimos anos, mas me parece intuitivo que somente um insensato negaria a existência do amor tendo a senhora como mãe. Sendo assim, eu agradeço a senhora pela vida. Não por ter me parido e me dado o direito de viver (seja lá o que isso signifique), mas por ter dado as condições materiais e emocionais para que eu vivesse ela da forma que eu julgasse adequada. Com a sua educação e apoio, eu pude inventar meus próprios pecados e poderei morrer do meu próprio veneno. Obrigado, minha mãe. Eu tenho tanto pra lhe falar, mas com palavras não sei dizer, como é grande o meu amor por você.

Sumário

1	Sistemas Quânticos Abertos	4
1.1	Da Matriz Densidade (ou Operador Estatístico)	5
1.2	Dos postulados da Mecânica Quântica revisitados	7
1.3	Da dinâmica de sistemas abertos	11
1.4	Dos sistemas bosônicos e fermiônicos	12
1.4.1	Cavidade de Kerr	14
1.4.2	Pontos Quânticos	16
2	Equações Mestras	24
2.1	Da Derivação da Equação Mestra	25
2.2	Da Equação Mestra Global para uma Rede de Férmions	32
3	Cavidade Óptica Acoplada com um Ponto Quântico Duplo	39
4	Estatística de Tempo de Espera	45
5	Estatística de Tempo de Espera para uma Cavidade Óptica Acoplada com um Ponto Quântico Duplo	51
5.1	Cenário de um Único Fóton	52
5.2	Cenário de Dois Fótons	55
6	Conclusão	62
A	Detalhando os Cálculos Feitos para a Derivação da Equação Mestra	64
B	Breve Explicação do Raciocínio por trás do uso do Wolfram Mathematica	68

Lista de Figuras

1.1	Cavidade de Kerr	15
1.2	Ponto Quântico Único	17
1.3	Ponto Quântico Duplo	19
2.1	Rede de Férmions	33
3.1	Cavidade de Óptica Acoplada com um Ponto Quântico Duplo	40
5.1	Tempo Médio Para o Cenário de um Único Fóton	56
5.2	Probabilidades de Detecção de Fotocorrente para o Cenário de Um e de Dois Fótons	60
B.1	Módulo de Código do Wolfram Mathematica 13.2	69

Introdução

O estabelecimento da Mecânica Quântica como teoria física talvez tenha sido a maior revolução científica dos últimos tempos. Não apenas pelas suas consequências racionalistas, no que diz respeito a quebra abrupta na forma que via-se os pilares fundamentais das leis que regem a dinâmica do universo, mas também nas consequências materiais que com ela foram possíveis, transbordando nosso presente século com tecnologias que facilmente seriam consideradas alienígenas há algumas décadas atrás.

Não obstante, da maneira que foi concebida originalmente, a Mecânica Quântica era capaz apenas de lidar com sistemas fechados, i.e., aqueles que estão isolados de qualquer influência externa e, por isso, conservam seu número de excitações. Sendo assim, no intuito de se expandir a validade da teoria e analisar comportamentos antes impossíveis com seu formato antigo, deu-se início a uma série de investigações rompendo a condição de isolamento dos sistemas quânticos. Em particular, nasceu a Teoria de Sistemas Quânticos Abertos [1].

Grosso modo, nesse formalismo subdividimos um sistema S em um sistema A cuja dinâmica é do nosso interesse, e em um outro B , que atuará como um meio externo para o primeiro, influenciando em sua evolução temporal. Para tal, trocamos o estado ρ que descreve o sistema composto $S = A + B$, por um estado reduzido $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ que descreve apenas a dinâmica do sistema A , com Tr_B representando a exclusão do espaço de Hilbert do sistema B pela operação de traço parcial. Com isso, podemos usar a lei dinâmica para o sistema composto S para obter uma equação dinâmica para ρ_A , de sorte que ela é equivalente à dinâmica quântica de um sistema em contato com um ambiente. Dentre outras consequências, isso faz com que se torne palpável uma análise termodinâmica de sistemas quânticos, imaginando, por exemplo, que o sistema B é um banho térmico. Assim, uma das grandes consequências do formalismo de sistemas quânticos abertos é dar

suporte para o nascimento da Termodinâmica Quântica, área que mescla uma teoria macroscópica e indiferente à estrutura interna dos corpos analisados, com uma que descreve a dinâmica dos corpos em seu nível mais elementar.

Em especial, dentro da ampla gama de aplicações desse formalismo, há dois tipos de sistemas que vem ganhando cada vez mais atenção nos últimos tempos: o *ponto quântico duplo* [2] e a *cavidade de Kerr* [3]. O primeiro descreve o acoplamento de dois sistemas compostos do tipo reservatório-poço de potencial, em que os reservatórios atuam como fornecedores ou despachantes de elétrons para os poços. No limite adequado, os poços podem acomodar apenas um partícula por vez dentro da região de efeito conjunto, o que permite que esse sistema atue como uma armadilha de elétrons. Em contrapartida, o segundo sistema citado versa sobre uma cavidade eletromagnética imersa em um meio não linear¹ que, quando em contato com um bombeio de fótons externo, prioriza dentro de si fótons com modos específicos, fazendo com estes tenham uma dinâmica regida pela não linearidade do meio em que se encontram. Ademais, podemos desligar a não linearidade concebida pela cavidade, de modo que o sistema resultante, denominado de *cavidade óptica*, atue apenas como um seletor de fótons com modos específicos de interesse. Este último, quando acoplado com um ponto quântico duplo, resulta em um sistema especialmente interessante, comumente chamado de detector de fótons, vide que uma das suas principais aplicabilidades é na detecção de um fóton isolado [4].

O detector mencionado acima foi amplamente estudado na literatura, em especial com o uso da estatística de contagem total [2, 5]. Aqui, visamos introduzir o formalismo de estatística de tempo de espera [6, 7] para extrair explicitamente diversas propriedades desse tipo de acoplamento, como a probabilidade de sucesso e de falha de detectarmos uma fotocorrente (elétron excitado por um fóton) quando inserimos um fóton na cavidade óptica. Isso se faz possível pois o formalismo citado dá subsídio à descrição de fenômenos discretos, como uma troca de excitações entre um sistema e outro, versando sobre a probabilidade de ocorrência dessa troca, o tempo médio de ocorrência dela, qual a probabilidade de ela acontecer em detrimento de outras interações, bem como outras quantidades de interesse físico.

¹Isto é, um meio que concebe uma diferença de potencial tal que as interações das partículas com os campos elétricos presentes nele sejam descritas por termos de acoplamento não lineares nos campos.

A dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1, discutimos aspectos gerais do formalismo de sistemas quânticos abertos, tópicos os quais foram selecionados com base no que julgamos suficiente para a compreensão dos nossos resultados. Ademais, introduzimos o ponto quântico duplo e a cavidade de Kerr; no capítulo 2, derivamos a equação mestra global para o caso de férmions em uma rede, que será crucial para a nossa análise da dinâmica de um ponto quântico duplo imerso em uma meio; no capítulo 3, discutimos o acoplamento entre um ponto quântico duplo e uma cavidade óptica, esta última sendo um caso particular da cavidade de Kerr; no capítulo 4, apresentamos o formalismo da estatística de tempo de espera, visando sua aplicabilidade para a análise sistemas quânticos abertos; no capítulo 5, usamos o formalismo apresentado no capítulo anterior para analisar as propriedades de um fotodetector para diferentes condições iniciais, sendo este o enfoque principal desse trabalho; as considerações finais são feitas na conclusão, capítulo 6. Por fim, a menos que seja dito o contrário, consideramos $\hbar \equiv k_B \equiv 1$.

Capítulo 1

Sistemas Quânticos Abertos

No formalismo usual de Mecânica Quântica [8], um estado $|\psi\rangle$ que descreve um sistema físico sempre está sujeito a condição $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, i.e., que a probabilidade de inferirmos a existência do sistema em algum ponto seja normalizada à unidade. Disso, segue que qualquer estado $U|\psi\rangle \equiv |\tilde{\psi}\rangle$ oriundo dele por uma evolução temporal U deve respeitar a mesma condição, ou seja,

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1 \Rightarrow U^\dagger U = \mathbb{I}. \quad (1.1)$$

A expressão acima nos diz que toda evolução feita no sistema deve ser unitária, de modo que conserve a normalização dos estados. Consequentemente, sempre podemos associar a U uma hamiltoniana hermitiana \hat{H} , de sorte que ficamos limitados à sistemas conservativos.

O estudo de sistemas não conservativos, então, parece emergir naturalmente por dois caminhos distintos: assumir hamiltonianas que não sejam hermitianas, assim abdicando da conservação da probabilidade [9], ou abrir mão da evolução unitária e buscar transformações mais gerais que preservem a normalização dos estados [1]. No que tange essa análise, escolheremos trilhar o segundo caminho. Para tal, vamos revisitar a estrutura quântica sob uma nova perspectiva.

1.1 Da Matriz Densidade (ou Operador Estatístico)

Essa seção é baseada nas construções presentes em [1, 10].

Tendo em vista que a dinâmica unitária emergiu da condição que impomos sobre os estados $|\psi\rangle$, é razoável que, como queremos manter essa restrição, modifiquemos a forma que descrevemos nossos sistemas físicos, i.e., o próprio $|\psi\rangle$. Dessa forma, vamos introduzir o operador estatístico

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.2)$$

em que p_i é a probabilidade de medirmos o estado $|\psi_i\rangle$. Note que, diferente da sobreposição quântica, os pesos p_i advêm da nossa ignorância clássica, podendo ser introduzidos de modo orgânico pela estrutura de ρ (produto de Kronecker entre o estado e seu dual).

Se agora impormos a condição de normalização sobre todos os estados $|\psi_i\rangle$, temos que, tirando o traço de (1.2) na base $\{|\psi_i\rangle\}$

$$\text{Tr}\{\rho\} = \sum_j \langle \psi_j | \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) | \psi_j \rangle = \sum_j \langle \psi_j | \sum_i p_i |\psi_i\rangle \delta_{ij} = \sum_j p_j = 1, \quad (1.3)$$

em que usamos a normalização das probabilidades clássicas no último passo. Com isso, como o traço independe da base, podemos concluir que impor a conservação da probabilidade dos estados físicos é equivalente a impor a restrição (1.3) sobre o traço de ρ .

Ainda, pela definição (1.2) é direto ver que $\rho = \rho^\dagger$, i.e., o operador estatístico é hermitiano, de sorte que seus autovalores são reais. Ademais, como ρ é escrito em termos de estados $|\psi\rangle$, segue que para um estado qualquer $|\phi\rangle$

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0, \quad (1.4)$$

o que nos diz que ρ é um operador positivo definido, sendo seus autovalores maiores ou iguais à zero. Essa constatação tem sua carga de sentido: como veremos, os autovalores de ρ estão associados com as probabilidades de obtermos estados físicos após alguma medição ser feita no sistema.

Além disso, vale citar que o traço de ρ^2 nos diz respeito à pureza de um estado. Para

ver isso, note que se escolhermos trabalhar na base $\{|\lambda_i\rangle\}$ de autoestados da matriz densidade, temos que

$$\rho^2 = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \langle \lambda_j | \lambda_i \rangle \langle \lambda_j | \lambda_i \rangle = \sum_i \lambda_i^2 |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|, \quad (1.5)$$

com $\{\lambda_k\}$ sendo os autovalores de ρ , de sorte que

$$\text{Tr}\{\rho^2\} = \sum_i \lambda_i^2 \leq 1, \quad (1.6)$$

uma vez que

$$\text{Tr}\{\rho\} = 1 \Rightarrow 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad (1.7)$$

onde o limite inferior advém do fato da matriz densidade ser positiva definida.

A expressão (1.6) pode ser usada para diferir estados ditos “puros” dos “impuros” (ou “mistos”), sendo os primeiros quando existir apenas um autovalor não nulo e, por conseguinte, igual a um, enquanto os segundos são definidos pelos demais valores. Um estado puro é então sempre redutível à um único $|\psi\rangle$ tal que

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad (1.8)$$

enquanto o estado misto sempre irá conter mais de um estado em sua composição, caracterizando assim um emaranhamento ou uma mistura clássica, esta última salientando nossa ignorância clássica que nasce, por exemplo, de limitações instrumentais.

Agora, tendo em vista que ρ carrega tanto as informações quânticas, quanto a nossa ignorância clássica sobre um sistema físico, podemos nos perguntar que tipo de operadores M_k preservam seu traço, i.e., que conservam as probabilidades de nossos estados¹. Uma maneira intuitiva de ver que tipo de restrição esses operadores têm que obedecer,

¹Repare que isso é diferente de buscarmos o conjunto de operadores U que, quando aplicados em $|\psi\rangle$, conservam sua norma

pode ser encontrada notando que ², como

$$|\psi\rangle \rightarrow M_k |\psi\rangle \Rightarrow \rho \rightarrow M_k \rho M_k^\dagger, \quad (1.9)$$

então

$$\sum_k \text{Tr}\{M_k \rho M_k^\dagger\} = \text{Tr}\left\{\sum_k M_k^\dagger M_k \rho\right\} \doteq \text{Tr}\{\rho\} = 1 \therefore \sum_k M_k^\dagger M_k = \mathbb{I}, \quad (1.10)$$

em que usamos a propriedade cíclica do traço na última passagem. Repare que a condição (1.10) não nos diz nada acerca dos operadores M_k isolados, mas sim do conjunto M_k , denominado *operadores de Kraus*. No caso de $k = 1$, segue que $M_1^\dagger M_1 = \mathbb{I}$ e recuperamos a dinâmica unitária.

Assim, a definição (1.2) não somente é compatível com a análise de sistemas quânticos, como também carrega um cunho mais geral no que tange a descrição da dinâmica dos mesmos, pois concebe evoluções não unitárias que respeita a normalização dos estados físicos.

Tendo estabelecido uma nova abordagem para o formalismo quântico, podemos revisar os postulados da Mecânica Quântica sob uma ótica do operador estatístico, visando o estudo da dinâmica de sistemas quânticos abertos.

1.2 Dos postulados da Mecânica Quântica revisitados

A estrutura formal da teoria quântica pode ser estabelecida partindo de uma série de postulados que visam fixar, antes de tudo, a natureza física das entidades matemáticas que estamos lidando. Se não fossem por eles, a Mecânica Quântica seria reduzida à uma teoria algébrica, sem quaisquer ligações com a realidade. Sendo assim, vamos postular quatro regras que irão definir que tipo de teoria física estamos utilizando para abordar as questões principais desse trabalho.

Postulado I (dos estados): Todo sistema físico é completamente descrito por uma matriz densidade ρ normalizada ($\text{Tr}\{\rho\} = 1$), semi-positiva definida ($\rho \geq 0$) e simétrica

²É importante salientar que essa não é uma demonstração geral, uma vez que partimos do pressuposto de que os M_k são iguais para cada $|\psi_i\rangle$ na definição geral de ρ . Esse resultado é conhecido como *teorema de Kraus*, e sua demonstração completa pode ser encontrada em [11].

($\rho = \rho^\dagger$), que pode ser expressa como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad p_i \in [0, 1], \quad (1.11)$$

em que $\{|\psi_i\rangle\}$ são vetores pertencentes a um espaço de Hilbert \mathcal{H} , responsáveis por conter todas as informações físicas do sistema em questão, enquanto p_i é a probabilidade de que o sistema seja descrito por $|\psi_i\rangle$ ³. Assim, esse postulado nos diz que resolver um problema em Mecânica Quântica é encontrar os estados ρ que descrevem o sistema que estamos lidando.

Além disso, repare que, como $|\psi_i\rangle$ representa um raio em \mathcal{H} , vetores que diferem por uma fase global $e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) representam o mesmo estado físico, uma vez que

$$|\psi_i\rangle \rightarrow e^{i\theta} |\psi_i\rangle \Rightarrow \rho \rightarrow \sum_i p_i e^{i\theta} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| e^{-i\theta} = \rho. \quad (1.12)$$

Essa relação nos diz que a dinâmica do nosso sistema deve independer da fase escolhida, de sorte que a dinâmica quântica é invariante sob transformações de fase.

Vale notar que sistemas compostos podem ser descritos por estados na forma $\rho = \bigotimes_j A_j$, em que A_j caracteriza a dinâmica do subsistema j por intermédio da relação

$$A_j = \text{Tr}_{k \neq j} \{\rho\}, \quad (1.13)$$

sendo que o subíndice no traço acima representa o traço parcial feito sobre todos os subespaços $k \neq j$.

Ainda, como sempre podemos modificar vetores que vivem em um espaço de Hilbert \mathcal{H} por intermédio da aplicação de um operador $O \in \mathcal{H}$, concluímos que qualquer operação feita no sistema, espontânea ou não, pode ser descrita na forma

$$\rho \rightarrow O\rho O^\dagger. \quad (1.14)$$

Em particular, operadores que representem quantidades físicas mensuráveis são chamados

³Lembre-se que p_i carrega a noção de uma probabilidade clássica. Assim, mesmo que o estado $|\psi_i\rangle$ contenha todas as informações físicas do nosso problema, podemos inferir com uma probabilidade p_j ($j \neq i$) de que o estado $|\psi_j\rangle$ é o que o faz.

de *observáveis*.

Postulado II (dos observáveis): Todo observável O é um operador auto-adjunto. Em particular, para o caso de espaços de Hilbert de dimensão finita, os observáveis podem ser descritos como matrizes hermitianas, i.e., $O = O^\dagger$.

É bem conhecido o fato de que operadores hermitianos têm um espectro real. Destarte, segue que as medições feitas em sistemas quânticos estarão associadas com os autovalores de operadores dessa natureza, bem como a descrição dos estados físicos com seus autovetores. Muitos processos de quantização (e.g., quantização canônica, de Sommerfeld, etc) partem de quantidades dinâmicas clássicas (que são observáveis nessa teoria) para moldar operadores hermitianos que funcionem como observáveis na teoria quântica. Esse postulado é um dos pilares que sustentam esse tipo de metodologia. Entretanto, ainda precisamos especificar o conceito de medição dentro dessa estrutura.

Postulado III (das medições): Qualquer medição em um sistema físico expresso em termos de uma matriz densidade ρ pode ser descrita por um conjunto de operadores de Kraus $\{M_i\}$. Ademais, a probabilidade de obtermos o sistema em um estado i é dado por $p_i = \text{Tr}\{M_i\rho M_i^\dagger\}$ e, caso o resultado da medida seja de fato i , isso leva o estado pós medição ser

$$\rho_i = \frac{M_i\rho M_i^\dagger}{p_i}. \quad (1.15)$$

A expressão acima advém da necessidade do estado consequente da medida feita ser normalizado.

Em suma, uma medida é assim qualquer operação que fazemos em nosso sistema que esteja dentro de um conjunto de Kraus, cuja probabilidade de obtermos um certo valor da quantidade que essa operação codifica é p_i . Note que os operadores projetivos (como quando escrevemos uma matriz hermitiana em termos do seus autovetores) são casos particulares da expressão (1.15), de modo que esta se faz uma definição mais geral para o processo de medida.

Por fim, resta concebermos uma expressão que dite a dinâmica dos sistemas quânticos. Para tal, vale notar que ela tem que estar de acordo com os três postulados acima, em especial com as propriedades do operador estatístico e com a simetria por transformações de fase.

Postulado IV (da dinâmica quântica): A evolução de um sistema quântico *fechado* descrito por um estado ρ é dada pela *equação de von Neumann*, a saber

$$\dot{\rho}(t) = -i [H, \rho], \quad (1.16)$$

em que t é o parâmetro da nossa teoria (tempo) e H é o observável de energia do sistema (hamiltoniano), com o ponto denotando derivadas totais.

Vale ressaltar que a expressão (1.16) pode ser derivada através de duas premissas consideradas fisicamente plausíveis: (a) a probabilidade total deve se conservar (i.e., a evolução temporal deve preservar $\text{Tr}\{\rho\} = 1$), o que leva a dinâmica a ser unitária (lembre-se que para um sistema fechado, só existe um operador de Kraus, veja 1.10); (b) o operador unitário U que rege essa equação deve respeitar a regra de associação $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$, vide que fisicamente podemos escolher evoluir o sistema de um ponto qualquer do tempo para outro e depois para um terceiro, ou diretamente do inicial para esse último, resultando em estados equivalentes. O observável de energia aparece pelo fato dele reger translações temporais, como no caso clássico, e o comutador contém a informação da evolução ser unitária, com $U = \exp\{-iHt\}$.

Escolhemos postular a dinâmica do sistema por duas razões. A primeira, é que, de um ponto de vista formal, a “demonstração” da expressão (1.16) requer os dois postulados adicionais citados acima, o que deixaria nossa lista maior do que a apresentada (repare que essas duas informações já estão contidas na equação dinâmica). Segundo, sendo essa demonstração bem conhecida, não vimos muita utilidade de acrescentá-la aqui (ver, por exemplo, [1]).

Apesar dos postulados aqui feitos serem totalmente equivalentes àqueles da Mecânica Quântica usual [8, 10, 12], descrevendo assim, em princípio, uma dinâmica fechada e conservativa (ver quarto postulado), o fato de termos expresso tudo em termos da matriz densidade fará com que seja possível vislumbrarmos a generalização dessa estrutura para sistemas abertos, de sorte que não precisamos acrescentar nenhuma nova premissa em nosso formalismo. Por ora, vamos apenas expor a equação dinâmica que rege sistemas quânticos abertos e averiguar suas implicações na descrição de sistemas físicos. Uma demonstração geral para o caso de interações locais e um caso particular (rede de férmions)

para interações globais está presente no segundo capítulo desse tratado.

1.3 Da dinâmica de sistemas abertos

Em 1976, Goran Lindblad e o trio GKS (Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski e George Sudarshan) derivaram, de maneira independente, a forma geral que uma equação dinâmica markoviana⁴ deve ter para que preserve as propriedades da matriz densidade [13, 14]. A saber,

$$\dot{\rho}(t) = -i [H, \rho] + \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(L_i \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_i^\dagger L_j, \rho \} \right), \quad \gamma_{ij} \geq 0, \quad (1.17)$$

em que $\{L_k\}$ são operadores quaisquer.

Comparando a expressão (1.17), comumente chamada de *equação de Lindblad* (ou *equação mestra*), com a equação de von Neumann (1.16), vemos que a dinâmica não unitária está contida no segundo termo do lado direito, de sorte que sua presença caracteriza perdas ou ganhos de excitações do sistema para um meio não contemplado em ρ . A soma-tória indica que diferentes meios ou combinações de interações podem estar presentes ao mesmo tempo, com os operadores $\{L_k\}$ sendo responsáveis por descrever a natureza desses acoplamentos (os “pulos” do sistema) e as constantes reais γ_{ij} revelam a intensidade dela. Por essas razões, chamamos entidades na forma

$$\mathcal{D}(\rho) \equiv L_i \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_i^\dagger L_j, \rho \} \quad (1.18)$$

de *dissipadores*, enquanto o conjunto $\{L_k\}$ são ditos os *operadores de pulo* do problema.

Ainda, vale ressaltar que se escrevermos a equação de Lindblad na forma

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}\rho, \quad (1.19)$$

com \mathcal{L} sendo um superoperador⁵ que, quando aplicado em ρ , resulta no lado direito de (1.17), podemos escrever uma solução formal para a dinâmica quântica de um sistema

⁴Isto é, cujas quantidades envolvidas em um tempo t não dependam de seus valores em um tempo $\tilde{t} < t \forall t, \tilde{t}$.

⁵Ou seja, um operador linear que atua em outros operadores, ao invés de um vetor.

aberto como sendo

$$\rho(t) = \exp\{\mathcal{L}t\}\rho(0), \quad (1.20)$$

uma vez que \mathcal{L} não depende explicitamente do tempo, em geral. Assim, uma das formas de resolvermos problemas dentro da estrutura de sistemas quânticos abertos é descobrir como a exponencial de \mathcal{L} atua sobre o estado inicial do nosso sistema. Problemas desse tipo são muitas vezes resolvidos por intermédio de processos de linearização, vetorização e mudança de referenciais [15].

No que segue, vamos ver dois exemplos de modelagem e análise de equação mestra para um sistema do tipo bosônico e outro de natureza fermiônica, estes os quais são de suma importância neste trabalho.

1.4 Dos sistemas bosônicos e fermiônicos

Nos cursos básicos de Mecânica Quântica [10, 12], vemos que um sistema de mais de uma partícula idêntica pode ser descrito apenas por estados simétricos ou antissimétricos em relação a seus números quânticos. Assim, existem duas grandes classes de partículas: as ditas bosônicas (simétricas) e as fermiônicas (antissimétricas). Essa característica dita qual tipo de distribuição estatística os sistemas formados por esses tipos de partículas respeitam e, por consequência, quais os valores de spin permitidos para as mesmas⁶.

De um ponto de vista da quantização canônica, sistemas bosônicos são caracterizados por operadores de criação a_i^\dagger e aniquilação a_i que respeitam uma álgebra na forma

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0, \quad (1.21)$$

enquanto sistemas fermiônicos são expressos em termos de operadores c_i e c_i^\dagger de mesma natureza, mas cuja álgebra é dada por

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = \{c_i, c_j\} = 0. \quad (1.22)$$

Em ambos os casos, qualquer hamiltoniana que possua *apenas* termos de interação de

⁶Para mais detalhes, ver *teorema do spin estatístico* [16].

ordem quadrada, ou seja, que são da forma

$$H = \sum_{ij} \left(\alpha_{ij} d_i d_j^\dagger + \beta_{ij} d_i d_j + \epsilon_{ij} d_i^\dagger d_j^\dagger \right) + h.c., \quad \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \epsilon_{ij} \in \mathbb{C}, \quad (1.23)$$

(“h.c.” denota “hermitiano conjugado” e $d_i = a_i, c_i$) pode ser diagonalizada por intermédio de uma transformação canônica

$$d_i \rightarrow \eta_i(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad (1.24)$$

em que $\{\eta_i\}$ é um novo conjunto de operadores que satisfazem a álgebra de bósons ou de férmions. A esse procedimento, damos o nome de *transformação de Bogoliubov* [17].

Além da praticidade de escrevermos hamiltonianos em termos de operadores de criação e aniquilação, essa abordagem nos permite tirar uma série de conclusões sobre a dinâmica unitária e não unitária do sistema. A esta última afirmação, esperamos que os exemplos abaixo esclareçam. No tocante a dinâmica unitária, um resultado em especial vale a pena ser pontuado.

Suponha que a hamiltoniana H do nosso sistema possa ser diagonalizada em termos dos operadores bosônicos a_j e a_j^\dagger , i.e.,

$$H = \sum_j \alpha_j a_j^\dagger a_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Logo, usando (1.21), temos que

$$[H, a_k] = \sum_j \alpha_j [a_j^\dagger, a_k] a_j = -\alpha_k a_k, \quad (1.26)$$

ou seja, a_k e, por conseguinte, a_k^\dagger , são auto operadores de H . Isso, em conjunto do teorema de BCH [10], nos diz que

$$e^{iHt} a_k e^{-iHt} = e^{-i\alpha_k t} a_k \quad (1.27)$$

é a forma que os operadores a_k evoluem unitariamente.

De modo completamente análogo, supondo agora um hamiltoniano na forma

$$H = \sum_j \beta_j c_j^\dagger c_j, \quad \beta_j \in \mathbb{R}, \quad (1.28)$$

em que c_k e c_k^\dagger são operadores fermiônicos, podemos usar a propriedade

$$[AB, C] = A \{B, C\} - \{C, A\} B \quad (1.29)$$

valida para quaisquer matrizes A , B e C de mesma dimensão, para escrevermos

$$[H, c_k] = \sum_j \beta_j [c_j^\dagger c_j, c_k] = - \sum_j \beta_j \{c_k, c_j^\dagger\} c_j = -\beta_k c_k, \quad (1.30)$$

que leva à mesma consequência (1.27) do caso bosônico (com $a_k \rightarrow c_k$ e $\alpha_j \rightarrow \beta_j$).

Com isso, vemos que diagonalizar o hamiltoniano em termos de operadores de criação e aniquilação é equivalente a saber a dinâmica unitária dos mesmos, o que permite extrair uma série de conclusões sobre um sistema físico, em especial analisar a influência do banho de maneira explícita ao comparar com o resultado isolado (que é de fácil acesso nesses casos).

No intuito de deixar clara a aplicabilidade desses tipos de álgebra na modelagem de sistemas abertos, bem como apresentar dois modelos físicos de interesse para essa dissertação, vamos averiguar uma dupla de exemplos: a cavidade de Kerr (bosônico) e o *double quantum dot* (DQD; fermiônico).

1.4.1 Cavidade de Kerr

Por Cavidade de Kerr, entendemos uma região do espaço em que os campos eletromagnéticos interagem entre si de modo não linear, podendo ter acoplamentos do tipo $a^n (a^\dagger)^m$ entre os modos bosônicos presentes dentro dela (vide Figura 1.1). Assim, imaginamos sempre um bombeio de fótons externos livres que, ao entrar na região caracterizada pela cavidade, passam a se comportar de maneira distinta e, por isso, quando detectados novamente fora dessa região, são vistos como feixes de partículas distintos, contendo mais ou menos fótons em sua composição do que antes.

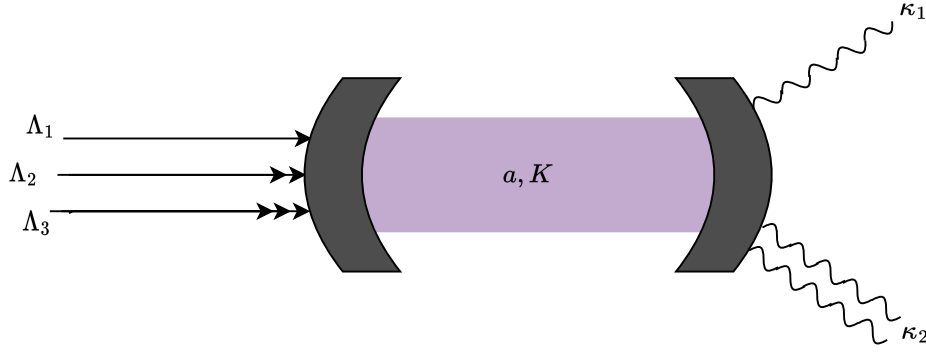


Figura 1.1: Cavidade de Kerr para o caso em que $d = 3$ em (1.31) e $n = 2$ em (1.32). Três tipos diferentes de bombeio são feitos simultaneamente, um que contempla um único fóton (calibrado por Λ_1), outro que contempla dois fótons (regido por Λ_2) e o que carrega três fótons subsequentes (dado por Λ_3). A cavidade permite o vazamento de um fóton sozinho ou de dois fótons simultâneos, cuja intensidade de escape é dada por κ_1 e κ_2 , respectivamente. A cavidade concebe fótons descritos por operadores bosônicos a e a^\dagger , além de possuir uma não linearidade calibrada pela constante K .

Sendo assim, a hamiltoniana H_K que descreve a dinâmica unitária desse sistema pode ser obtida ao levarmos em conta três contribuições independentes, a saber

$$H_K = \omega_r a^\dagger a + \frac{K}{2} a^\dagger a^\dagger a a + \left[\sum_d \frac{\Lambda_d}{d} (a^\dagger)^d + h.c. \right], \quad (1.31)$$

sendo o primeiro termo a contribuição da cavidade livre, com ω_r sendo a frequência de ressonância da cavidade, o segundo termo representando a interação dos modos internos da cavidade, caracterizado pela constante de não linearidade de Kerr K , e o terceiro termo sendo a contribuição relativa à interação do bombeio com a cavidade, onde d caracteriza o número de fótons sendo bombeados ao mesmo tempo com intensidade Λ_d [3]. Repare que o operador a (a^\dagger) nos diz quando um modo é aniquilado (criado) no sistema, sendo que a cavidade e o bombeio possuem a mesma coleção de modos. Isto é, toda a interpretação física da hamiltoniana acima é clara (e passível de ser montada intuitivamente) devido a essas entidades.

Vale notar que (1.31) versa sobre um sistema conservativo: todos os modos que são criados na cavidade são aniquilados no bombeio e vice-versa. Estando o bombeio fixado na descrição acima, a energia automaticamente é conservada. Sendo assim, como era de se esperar, a hamiltoniana H_K não descreve a perda de fótons do sistema total após o

feixe de fótons passar pela cavidade, de sorte que impossibilita a análise da modificação do mesmo pós interação. Para isso, devemos usar dissipadores $\mathcal{D}[L_k]$, em conjunto da equação mestra (1.17), uma vez que eles permitem a perda de excitações para o meio.

Sabendo que as desexcitações do sistema são dadas pelo decréscimo de fótons, toda problemática se resume em encontrar os operadores de pulso L_k que implementam essas perdas. Entretanto, já temos essa informação pela construção do problema: os operadores de aniquilação a fazem esse papel. Assim, se quisermos descrever a perda de n fótons consecutivos, basta que escolhamos $L_n = a^n$. Isto é,

$$\dot{\rho}(t) = -i [\hat{H}_K, \rho] + \sum_n \kappa_n \mathcal{D}[a^n](\rho), \quad (1.32)$$

em que

$$\mathcal{D}[a^n] = a^n \rho (a^\dagger)^n - \frac{1}{2} \{ (a^\dagger)^n a^n, \rho \}. \quad (1.33)$$

Em outras palavras, (1.32) contabiliza, além da evolução unitária do sistema, todas as possíveis feixes que podem vazar da cavidade, sendo que aquele com n fótons é mais provável quanto maior a constante de acoplamento κ_n .

Repare que poderíamos ainda simular um meio que está constantemente bombeando fótons para o sistema através de um dissipador na forma de $\sum_n \tilde{\gamma}_n \mathcal{D}[(a^\dagger)^n]$. De fato, variantes dessa forma têm aplicabilidade física em supercondutores, bem como soluções analíticas que são de interesse teórico [3]. Entretanto, foge do escopo desse trabalho tais descrições, de sorte que nosso interesse futuro será em uma forma ainda mais simplificada de (1.32), denominada de *cavidade óptica*. Nela, consideramos a ausência da não linearidade de Kerr, fazendo $K = 0$, bem como nos restringimos a um feixe monocromático, levando $\Lambda_d = 0$ para todo $d \neq 1$.

1.4.2 Pontos Quânticos

Nosso objetivo agora é analisar a física de dois poços de potencial, cada qual acoplado com um reservatório de elétrons, o chamado ponto quântico duplo (DQD do termo em inglês *double quantum dot*). Não obstante, no intuito de ganharmos alguma intuição sobre quais aproximações são razoáveis para esse tipo de problema, vamos dar uma breve

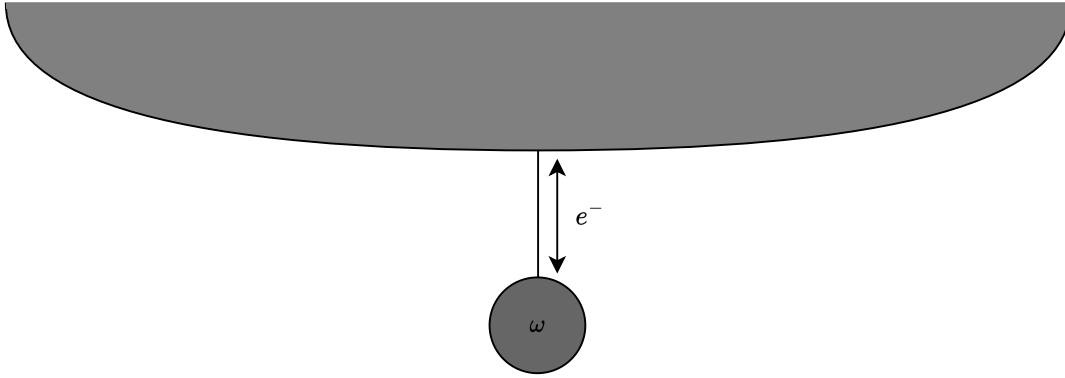


Figura 1.2: Ponto quântico único. O sistema é dado por um terminal metálico atuando como reservatório de elétrons e^- para o poço de potencial de energia ω . No regime de *Coulomb blockade*, apenas um elétron por vez pode ocupar o poço ω .

olhada no modelo de um único poço restrito à um reservatório, denominado ponto quântico único.

Ponto Quântico Único

Nesse caso, podemos imaginar um poço de potencial conectado a um terminal metálico, de sorte que existe uma probabilidade não nula de um elétron tunelar para dentro do poço através do metal e vice-versa (Figura 1.2). Sendo assim, ajustando nosso poço de tal modo que só partículas com energia ω podem penetrá-lo, somos capazes descrever esse sistema por intermédio de operadores fermiônicos de criação c_j^\dagger e aniquilação c_j , em que j é uma variável binária, tal que $j = +$ representa um elétron de spin para cima, enquanto $j = -$ versa sobre um com spin para baixo.

A dinâmica unitária é então garantida pela hamiltoniana

$$H_{SQD} = \omega \left(c_+^\dagger c_+ + c_-^\dagger c_- \right) + U c_+^\dagger c_+ c_-^\dagger c_-, \quad (1.34)$$

sendo que o termo proporcional a ω diz respeito ao poço livre, enquanto o último termo representa a interação entre os elétrons presentes no sistema, sendo esta majoritariamente coulombiana (vide que o poço é atenuado) com intensidade U . Note que não precisamos inserir o termo do terminal metálico livre, uma vez que ele pode ser visto como um reservatório de partículas e, assim sendo, sua energia é constante, de sorte que podemos fixá-la como zero.

Agora, se nosso interesse se voltar apenas à presença ou ausência de um elétron no poço, seus valores de spin podem ser ignorados, pois geram uma diferença de energia desprezíveis no espectro do problema⁷. Assim, podemos descrever nosso problema em termos de um único par de operador de criação c^\dagger e de aniquilação c , responsáveis por retirar ou alocar elétrons de qualquer spin no nosso sistema.

Por fim, podemos considerar que a energia repulsiva entre os elétrons é muito grande, uma vez que o poço é atenuado, levando à $U \gg \omega$. Isso faz com que a probabilidade de se detectar mais de uma partícula dentro do poço seja desprezível, uma vez que para tal devemos levar em conta a contribuição $e^{-U/T}$ na distribuição de Boltzmann (T é a temperatura do terminal), que será muito menor do que aquela oriunda de ω . Nesse regime, denominado de *Coulomb blockade*, podemos assumir que

$$H_{SQD} = \omega c^\dagger c \quad (1.35)$$

é um hamiltoniano adequado para a descrição do nosso SQD.

Ponto Quântico Duplo (DQD)

As ideias apresentadas acima são facilmente estendíveis para o caso do DQD, que pode ser visto como o acoplamento de dois SQD⁸, como elucidado na Figura 1.3.

Ignorando a diferença de spins entre os elétrons, o hamiltoniano desse sistema pode ser expresso na forma [2]

$$H_{DQD} = \omega_R c_R^\dagger c_R + \omega_L c_L^\dagger c_L + t_c \left(c_L^\dagger c_R + c_R^\dagger c_L \right) - U_{RL} \left(c_L c_R^\dagger + c_R c_L^\dagger \right), \quad (1.36)$$

em que os dois primeiros termos representam a descrição livre do poço R e do poço L , respectivamente, o terceiro termo descreve a interação entre os dois poços, com constante de acoplamento t_c (c_J é, obviamente, o operador de aniquilação para o poço $J = L, R$)

⁷Ver a discussão sobre *níveis de Landau* em [10].

⁸Aqui, estamos implicitamente considerando que os terminais metálicos de cada *quantum dot* estão em equilíbrio termodinâmico entre si, de modo que não há nenhum fluxo de energia entre eles. O caso em que existe uma diferença de temperatura e de potencial químico entre eles é considerado em [18], embora em para um sistema ligeiramente diferente.

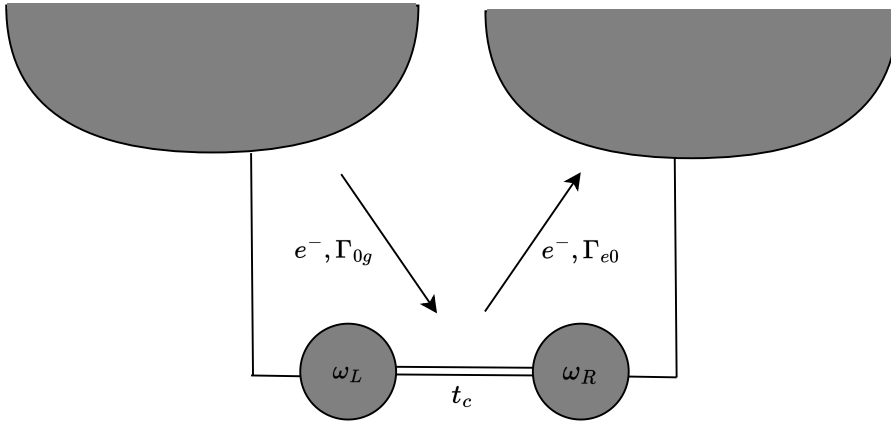


Figura 1.3: Ponto quântico duplo. Dois poços de potencial (representados pelos círculos) acoplados cada um com um reservatório de elétrons e^- e entre si com uma constante de acoplamento t_c . O poço da esquerda concebe elétrons com energia ω_L , enquanto o da direita com energia ω_R . No regime de *Coulomb blockade*, o estado fundamental e o estado excitado do sistema descrevem um elétron sobreposto entre os dois poços. Assim, quando calibrado da maneira adequada, o reservatório da esquerda é responsável por inserir elétrons no estado fundamental a uma taxa de tunelamento Γ_{0g} , enquanto o reservatório da direita recebe elétrons no estado excitado à uma taxa Γ_{e0} . Com isso, o sistema quase sempre terá um elétron no estado fundamental, de sorte que caso ele passe para o estado excitado devido a alguma interação, o reservatório da esquerda o captura.

e o último termo descreve a repulsão coulombiana entre os elétrons dos diferentes poços, caracterizada pela energia U_{RL} . Vale enfatizar que, por estarmos considerando o regime de *Coulomb blockade* para cada ponto quântico isolado, cada poço só pode conceber um elétron por vez.

No intuito de melhor analisarmos a física de H_{DQD} , vamos decompô-la na base de Fock $\{|L\rangle, |0\rangle, |R\rangle, |LR\rangle = |RL\rangle\}$, em que $|L\rangle$ representa um estado com um elétron no poço da esquerda, $|0\rangle$ o estado sem nenhum elétron no DQD, $|R\rangle$ aquele com um elétron no poço da direita e $|LR\rangle$ aquele com um elétron no poço da esquerda e um no da direita. O estado de $|0\rangle$ caracteriza o vácuo do modelo, de modo que

$$c_J^\dagger |0\rangle = |J\rangle, \quad c_J |J\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad c_J |0\rangle = c_J |X\rangle = 0, \quad X \neq J. \quad (1.37)$$

Destarte, é direto ver que

$$H_{DQD} = \sum_{\xi, \theta=L,R,0,LR} \langle \xi | H_{DQD} | \theta \rangle | \xi \rangle \langle \theta | =$$

$$= \omega_R |R\rangle \langle R| + \omega_L |L\rangle \langle L| + t_c (|R\rangle \langle L| + |L\rangle \langle R|) \quad (1.38)$$

é o hamiltoniano do sistema na base desejada, em que os termos diagonais $|LR\rangle$ foram desprezados em prol do regime de *Coulomb blockade* na forma $U_{RL} \gg \omega_{R,L}$, vide que não estamos interessados em nenhuma repulsão dessa natureza (i.e., selecionamos escalas de energia onde a probabilidade de ocorrência desse fenômeno é baixa, da mesma forma que antes).

Podemos ainda ajustar os parâmetros de nosso modelo de tal modo que as energias dos poços sejam [4]

$$\omega_R \equiv -\omega_L = \frac{\epsilon}{2}, \quad \epsilon \equiv \omega_R - \omega_L, \quad (1.39)$$

ou seja,

$$H_{DQD} = \frac{\epsilon}{2} (|R\rangle \langle R| - |L\rangle \langle L|) + t_c (|R\rangle \langle L| + |L\rangle \langle R|). \quad (1.40)$$

Nesse formato, podemos facilmente vislumbrar uma escolha de uma base que diagonalize H_{DQD} , de sorte que podemos analisar o espectro de energia do sistema e quais as características dos estados que as concebem. Assim, aplicando uma transformação de bases na forma

$$\begin{pmatrix} |L\rangle \\ |R\rangle \\ |0\rangle \\ |LR\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{\Omega} & \frac{2t_c}{\Omega} & 0 & 0 \\ -\frac{2t_c}{\Omega} & -\frac{\epsilon}{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |g\rangle \\ |e\rangle \\ |0\rangle \\ |LR\rangle \end{pmatrix}, \quad \Omega \equiv \sqrt{4t_c^2 + \epsilon^2}, \quad (1.41)$$

obtemos a forma diagonal da hamiltoniana do DQD como sendo

$$H_{DQD} = \frac{\Omega}{2} \sigma_3 \quad (1.42)$$

em que

$$\sigma_3 \equiv |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \quad (1.43)$$

é uma das matrizes de Pauli.

Podemos ver então que dentro do regime adotado, o DQD tem uma propriedade atípica: seu estado fundamental $|g\rangle \langle g|$ é alcançado quando temos um elétron em uma su-

perposição específica entre os poços L e R . Em outras palavras, é mais favorável para o sistema ter algum férmion do que nenhum, de sorte que quase sempre teremos um elétron à nossa disposição dentro do DQD. Essa propriedade é fundamental para a modelagem de um detector de fótons, como veremos mais adiante.

Não obstante, a descrição feita acima ainda é unitária. Isso faz com que a energia do sistema poços-reservatórios seja sempre conservada, de sorte que o número de partículas também o é. De um ponto de vista experimental, isso quer dizer que não detectaríamos correntes elétricas nas ligas metálicas oriundas dos poços de potencial, o que não nos permite “gastar” os elétrons que acumulamos nos poços em troca de energia. Assim, é de interesse inserirmos essas perdas em nossa descrição por intermédio do formalismo de sistemas abertos.

Novamente, nosso trabalho se resume em desvendar que tipos de matrizes podem servir como operadores de pulso para nossa problemática. No caso da cavidade de Kerr, queríamos explicitamente expulsar fótons da cavidade, de modo que inferimos que nossos operadores de aniquilação bosônicos cumpriam bem esse papel. Aqui, estamos interessados na troca energética dos elétrons no poço e na liga de maneira geral e, como vimos pela diagonalização da hamiltoniana H_{DQD} , nem sempre perder ou ganhar energia significa retirar ou acrescentar uma partícula no sistema. Diferente disso, vimos que tanto o estado fundamental $|g\rangle$, quanto o excitado $|e\rangle$ possuem um único férmion em sua composição. Destarte, devemos buscar operadores que descrevam transições entre os estados $|g\rangle$, $|0\rangle$ e $|e\rangle$ se quisermos contemplar pulsos coerentes com nosso modelo.

Com isso em mente, vamos definir os operadores

$$s_g = |0\rangle \langle g|, \quad s_e = |0\rangle \langle e| \quad \text{e} \quad \sigma_+ \equiv |e\rangle \langle g|, \quad (1.44)$$

que cumprem o papel de transitar o estado que está à direita (*bra*) para a quantidade à esquerda (*ket*), com seus hermitianos conjugados fazendo o contrário. Por exemplo,

$$s_g |g\rangle = |0\rangle \langle g|g\rangle = |0\rangle, \quad (1.45)$$

i.e., s_g (s_g^\dagger) descreve a transição do sistema do estado $|g\rangle$ ($|0\rangle$) para o estado $|0\rangle$ ($|g\rangle$).

Os operadores acima nos permite definir o dissipador mais geral possível para o nosso

problema, sendo ele

$$\mathcal{D}_{DQD} = \Gamma_{g0}\mathcal{D}[s_g] + \Gamma_{0g}\mathcal{D}[s_g^\dagger] + \Gamma_{e0}\mathcal{D}[s_e] + \Gamma_{0e}\mathcal{D}[s_e^\dagger] + \gamma_+\mathcal{D}[\sigma_+] + \gamma_-\mathcal{D}[\sigma_+^\dagger], \quad (1.46)$$

em que $\mathcal{D}[L](\rho)$ é dado em (1.18) fazendo $i = j = k$. Cada dissipador do lado direito da expressão (1.46) tem uma interpretação física clara⁹: os dois primeiros versam acerca da troca de elétrons no estado fundamental entre os poços e os terminais metálicos; o terceiro e o quarto falam sobre a troca de férmions no estado excitado entre os poços e o metal; já o quinto e o sexto discorrem a respeito de partículas que continuam dentro dos poços, mas perdem ou ganham energia para fônons do terminal vizinho, de sorte que sofrem um ganho ou uma perda energética. As constantes Γ_{g0} , Γ_{0g} , Γ_{e0} , Γ_{0e} , γ_+ e γ_- versam sobre a taxa em que essas transições ocorrem.

De um ponto de vista empírico, é interessante que a probabilidade de um elétron tunelar de um metal para o poço no estado fundamental seja apreciavelmente maior do que a probabilidade dele sair do poço estando nesse estado, para assim mantermos um controle sobre os elétrons que entram e saem do nosso sistema. Da mesma forma, é igualmente satisfatório que a probabilidade dele vazar do poço estando no estado excitado seja significativamente maior do que de um elétron entrar no poço através do metal já no estado excitado. Isso, como veremos, faz parte das aproximações que levam à um detector de fótons ideal. Assim, justifica-se as aproximações $\Gamma_{0g} \gg \Gamma_{g0}$ e $\Gamma_{0e} \ll \Gamma_{e0}$. Da mesma forma, podemos dificultar a troca de energia entre os férmions dos poços e os fônons dos metais otimizando a distância entre os terminais e os poços. Dessa forma, evitamos que nosso sistema sofra mudanças de estados oriundas dessas interações, de sorte que $\gamma_-, \gamma_+ \approx 0$. Com essas considerações, podemos direcionar nossa análise à uma equação mestra da forma

$$\dot{\rho}(t) = -i[H_{DQD}, \rho] + \Gamma_{g0}\mathcal{D}[s_g](\rho) + \Gamma_{0e}\mathcal{D}[s_e^\dagger](\rho). \quad (1.47)$$

Um ponto interessante que vale ser ressaltado é que, por se tratar de um sistema de poucos níveis, as quantidades envolvidas na análise do DQD vivem em espaços de Hil-

⁹Vale notar que em alguns casos considera-se um dissipador na forma $\mathcal{D}[\sigma_3]$, este referente à diferença de potencial entre o meio e o sistema [5, 19]. Não obstante, esse tipo de interação não é de interesse nesse trabalho.

bert finitos e tratáveis, de modo que a equação (1.47) e diferentes variações dela podem ser resolvidas analiticamente. Devido a isso, sistemas dessa forma possuem grande importância teórica e prática, principalmente no que diz respeito à suas aplicabilidades em computação quântica [2].

Nos capítulos que seguem, veremos como o acoplamento do DQD com uma cavidade óptica pode gerar um sistema que, dentre outras coisas, atua como um detector de fótons (i.e., um *fotodetector*). Assim, as descrições bosônicas e fermiônicas feitas nessa seção irão convergir para o estudo de um mesmo modelo, exaltando assim a riqueza física desses dois sistemas.

Capítulo 2

Equações Mestras

No capítulo anterior, introduzimos a forma geral de uma equação mestra que rege a dinâmica de sistemas abertos, com o único intuito de explorarmos suas propriedades e consequências. Ademais, construímos dissipadores por intermédio da nossa intuição, sem nos preocuparmos com possíveis restrições que os operadores de pulso podiam ter. Agora, pelo contrário, vamos analisar a construção da evolução temporal de sistemas markovianos de modo mais sistemático, no intuito de entendermos quais aproximações físicas estamos levando em conta nesse tipo de abordagem.

Para isso, investigaremos primeiro uma construção geral para a dinâmica de um único sistema em contato com um único meio. Note que, mesmo não sendo sempre de interesse, podemos, em geral, reduzir nossa dinâmica a uma do tipo sistema mais ambiente (assim como podemos reduzi-la a uma unitária, levando em conta que esses formam um único sistema). Em seguida, usaremos esse resultado para investigar a forma de uma equação mestra global para um rede de férmions, este sendo fundamental para a descrição dos DQDs. Nesse caso, consideramos a dinâmica de um sistema composto cujas partes interagem entre si e com meios externos. Em ambos os casos, adotaremos uma abordagem que, embora em certo nível seja formal, é mais voltada à física do problema, se sustentando com base em hipóteses plausíveis para com a realidade, destoando bastante da forma que tais resultados foram obtidos originalmente [13, 14].

2.1 Da Derivação da Equação Mestra

Essa seção possui como base o raciocínio apresentado na seção 3.3 de [1].

Considere um sistema S acoplado com um banho B . Podemos dividir o hamiltoniano H do sistema composto ($S + B$) como sendo

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (2.1)$$

em que $H_{S,B}$ representam os hamiltonianos do sistema e do banho livres, respectivamente, enquanto H_I descreve a interação sistema-banho. Assim, pelo nosso quarto postulado, a dinâmica do sistema composto na representação de Dirac será¹

$$\dot{\rho}(t) = -i[H_I(t), \rho(t)], \quad (2.2)$$

em que

$$H_I(t) = (e^{iH_S t} \otimes e^{iH_B t}) H_I(0) (e^{-iH_S t} \otimes e^{-iH_B t}), \quad (2.3)$$

logo,

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t d\xi [H_I(\xi), \rho(\xi)] \quad (2.4)$$

é a solução formal para a matriz densidade do sistema total ($S + B$) no referencial de interação. Sendo o operador estatístico que descreve apenas a dinâmica do sistema de interesse dado por $\rho_S(t) = \text{Tr}_B\{\rho(t)\}$, segue que

$$\dot{\rho}_S(t) = -i \text{Tr}_B\{[H_I(t), \rho(t)]\} = - \int_0^t d\xi \text{Tr}_B\{[H_I(t), [H_I(\xi), \rho(\xi)]]\} \quad (2.5)$$

é a equação dinâmica para S , em que usamos a solução formal (2.4) e impomos a condição inicial

$$\text{Tr}_B [H_I(t), \rho(0)], \quad (2.6)$$

por simplicidade, o que quer dizer que o sistema e o banho interagem a partir de $t = 0$.

Da forma exposta acima, a equação (2.5) não se faz muito útil, vide que ainda estamos à mercê de encontrarmos a solução $\rho(t)$ para o sistema total. Então, no intuito de

¹Veja a seção 2.4c de [10].

extrairmos a evolução temporal de $\rho_S(t)$ sob a influência de sua interação com o meio, mas que independa da evolução deste, vamos introduzir uma série aproximações relativas à natureza dessas duas entidades, começando pelas denominadas *aproximações de Born-Markov*. São elas:

1. A presença do sistema é quase imperceptível ao banho, de sorte que

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B, \quad (2.7)$$

i.e., na escala de tempo em que se dá a interação, o ambiente permanece praticamente o mesmo.

2. A dinâmica do sistema é markoviana, ou seja, $\dot{\rho}$ não depende do passado do sistema. Isso pode ser alcançado fazendo $\rho_S(\xi) \rightarrow \rho_S(t)$, de modo que $\rho_S(t)$ não participe da integral em (2.5), e fazendo as trocas $\int_0^t \rightarrow \int_0^\infty, \xi \rightarrow (t - \xi)$, que excluem a dependência de ρ na escolha das condições iniciais do problema.

Feitas as considerações acima, temos que (2.5) se torna

$$\dot{\rho}_S(t) = - \int_0^\infty d\xi \text{Tr}_B \{ [H_I(t), [H_I(t - \xi) \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \}. \quad (2.8)$$

Agora, vamos decompor $H_I(0)$ como sendo

$$H_I(0) = AB^\dagger + BA^\dagger, \quad (2.9)$$

em que $A \equiv \tilde{A} \otimes \mathbb{I}_B$ e $B \equiv \mathbb{I}_A \otimes \tilde{B}$ são operadores que atuam apenas nos subespaços do sistema e do banho, respectivamente. Essa decomposição evidencia uma noção de conservação entre as excitações sistema-banho, uma vez que nos diz que quando algo é criado no sistema (A^\dagger), outra é aniquilada no banho (B), e vice-versa². Estando nosso interesse voltado à dinâmica no subespaço de A , vamos fixar nosso desenvolvimento em torno desse observável.

²Vale ressaltar que apesar de (2.9) introduzir essa noção de criação e aniquilação, ela não precisa necessariamente descrever esse tipo fenômeno. Por exemplo, podemos escolher A e B hermitianos, de modo que essa interpretação se faz inválida.

Assim, escolhendo a base $\{|\varepsilon\rangle\}$ de autoestados de H_S , podemos decompor o operador A na forma

$$A = \sum_{\omega} A(\omega), \quad A(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta_{\omega, (\varepsilon' - \varepsilon)} \langle \varepsilon | A | \varepsilon' \rangle |\varepsilon\rangle \langle \varepsilon'|. \quad (2.10)$$

O delta de Kronecker $\delta_{\omega, (\varepsilon' - \varepsilon)}$ coloca um vínculo entre as escalas de energia do sistema, nos dizendo que as transições possíveis dos estados $|\varepsilon\rangle$ para os $|\varepsilon'\rangle$ custam uma energia ω . Além disso, é claro,

$$H_S = \sum_{\varepsilon} \varepsilon |\varepsilon\rangle \langle \varepsilon|, \quad (2.11)$$

donde sai que

$$[H_S, A(\omega)] = -\omega A(\omega) \quad (2.12)$$

e, por conseguinte,

$$[H_S, A^\dagger(\omega)] = \omega A^\dagger(\omega). \quad (2.13)$$

Essas relações nos dizem que para que $A(\omega)$ e $A^\dagger(\omega)$ sejam capazes de descrever a interação entre o sistema e o banho, eles devem ser auto operadores da hamiltoniana do sistema. Repare que os operadores fermiônicos e bosônicos estudados na seção 1.4 respeitam essa condição, de sorte que a abordagem que fizemos na construção dos dissipadores se mostram consistentes. Ademais, como discutimos naquela seção, desse resultado também segue que

$$e^{iH_S t} A(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A(\omega) \quad (2.14)$$

e

$$e^{iH_S t} A^\dagger(\omega) e^{-iH_S t} = e^{i\omega t} A^\dagger(\omega) \quad (2.15)$$

descrevem a evolução temporal dos operadores $A(\omega)$ e $A^\dagger(\omega)$ na representação de Dirac. Disso, segue imediatamente que

$$[H_S, A^\dagger A(\omega)] = A^\dagger(\omega) [H_S, A(\omega)] + [H_S, A^\dagger(\omega)] A(\omega) = 0, \quad (2.16)$$

i.e., os observáveis $A^\dagger(\omega)A(\omega)$ se conservam localmente, independente da forma da hamiltoniana do sistema³.

³Essa observação é importante, pois nos casos bosônicos e fermiônicos estudados na seção 1.4, consideramos uma hamiltoniana quadrática, de modo que esse resultado não se mostrava como geral.

Retomando para a hamiltoniana de interação, podemos usar (2.3), (2.9), (2.10), (2.14) e (2.15) para reescrevê-la na forma

$$H_I(t) = \sum_{\omega} (e^{i\omega t} A^{\dagger}(\omega) B(t) + e^{-i\omega t} B^{\dagger}(t) A(\omega)), \quad (2.17)$$

em que

$$B(t) = e^{iH_B t} B e^{-iH_B t} \quad (2.18)$$

é o operador que atua no subespaço do banho na representação de Dirac. Tornando esses resultados em (2.8), segue que (veja o Apêndice A)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(S) = & - \sum_{\omega, \omega'} \left\{ \gamma_1 e^{i(\omega' + \omega)t} (A^{\dagger}(\omega) A^{\dagger}(\omega') \rho_S(t) - A^{\dagger}(\omega') \rho_S(t) A^{\dagger}(\omega)) + \right. \\ & + \gamma_2 e^{i(\omega' + \omega)t} (\rho_S(t) A^{\dagger}(\omega') A^{\dagger}(\omega) - A^{\dagger}(\omega) \rho_S(t) A^{\dagger}(\omega')) + \\ & + \gamma_3 e^{i(\omega - \omega')t} (A^{\dagger}(\omega) A(\omega') \rho_S(t) - A(\omega') \rho_S(t) A^{\dagger}(\omega)) + \\ & \left. + \gamma_4 e^{i(\omega - \omega')t} (\rho_S(t) A(\omega') A^{\dagger}(\omega) - A^{\dagger}(\omega) \rho_S(t) A(\omega')) + h.c. \right\}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

em que definimos

$$\gamma_1(\omega) \equiv \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi\omega'} \text{Tr}_B \{B(t - \xi) \rho_B B(t)\}, \quad (2.20)$$

$$\gamma_2(\omega) \equiv \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi\omega'} \text{Tr}_B \{B(t - \xi) B(t) \rho_B\}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_3(\omega) \equiv \int_0^{\infty} d\xi e^{\xi\omega'} \text{Tr}_B \{B^{\dagger}(t - \xi) \rho_B B(t)\}, \quad (2.22)$$

e

$$\gamma_4(\omega) \equiv \int_0^{\infty} d\xi e^{\xi\omega'} \text{Tr}_B \{\rho_B B^{\dagger}(t - \xi) B(t)\} \quad (2.23)$$

como as funções de correlação do banho. Sendo este último descrito por um estado ρ_B estacionário, i.e., $[H_B, \rho_B] = 0$, segue que

$$\text{Tr}_B \{\rho_B J(t - \xi) K(t)\} = \text{Tr}_B \{\rho_B J(\xi) K(0)\} \quad (2.24)$$

para quaisquer operadores J e K que vivem no subespaço de H_B , de modo que as quantidades $\gamma_j(\omega)$ definidas acima independem do tempo.

Além disso, repare que se usarmos a decomposição (2.9) na condição inicial (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B \{ (AB^\dagger + BA^\dagger), (\rho_S(0) \otimes \rho_B) \} = \\ = [A, \rho_S(0)] \text{Tr}_B \{ B^\dagger \rho_B \} + [A^\dagger, \rho_S(0)] \text{Tr}_B \{ B \rho_B \} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Rightarrow \text{Tr}_B \{ B^\dagger \rho_B \} = \text{Tr}_B \{ B \rho_B \} = 0, \quad (2.25)$$

em vez que $[A, \rho_S(0)]$ e $[A^\dagger, \rho_S(0)]$ são quantidades independentes. Esse resultado reforça a ideia de que a condição (2.6) é uma forma de inibirmos a influência da hamiltoniana do banho livre nas medidas de energia do sistema composto. Mais importante que isso, ele nos permite assumir que, para os problemas que iremos abordar, $\gamma_1(\omega) = \gamma_2(\omega) = 0$, uma vez que não estamos interessados em casos em que os operadores de aniquilação $B(t)$ dependam do seu histórico, i.e., queremos que $B(t)$ e $B(t + \xi)$ sejam independentes entre si. A garantia de que podemos anular $\gamma_1(\omega)$ e $\gamma_2(\omega)$ vem então de (2.24), pois os valores esperados de $B(t)$ e $B(0)$ são nulos e independentes⁴. Assim, apenas os termos proporcionais à γ_3 e γ_4 sobrevivem em (2.19), i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(S) = - \sum_{\omega, \omega'} \left\{ \gamma_3(\omega) e^{i(\omega - \omega')t} (A^\dagger(\omega) A(\omega') \rho_S(t) - A(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega)) + \right. \\ \left. + \gamma_4(\omega) e^{i(\omega - \omega')t} (\rho_S(t) A(\omega') A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A(\omega')) + h.c. \right\}. \quad (2.26) \end{aligned}$$

Apesar dos nossos esforços, a equação diferencial acima ainda é difícil de se trabalhar, muito por conta dos fatores exponenciais dependentes do tempo que aparecem em cada termo das somatórias. Não obstante, se invocarmos novamente a insensibilidade do meio ante ao sistema, podemos considerá-lo como sendo um reservatório termodinâmico que concebe um contínuo de energias ω , de sorte que as exponenciais oscilem rapidamente, garantindo assim que todo o termo cujo $\omega \neq \omega'$ seja igual a zero. Essa última aproxima-

⁴Em outras palavras, $\langle B(t)B(0) \rangle = \langle B(t) \rangle \langle B(0) \rangle = 0$, uma vez que $\langle B(t) \rangle = \langle B(0) \rangle = 0$, pela condição (2.25). O mesmo vale para $B^\dagger(t)$.

mação, denominada de *aproximação secular*, pode ser adotada sempre que o tempo de relaxamento do sistema (dado pelo inverso de $|\omega - \omega'|$) for grande quando comparado ao tempo de relaxamento do sistema composto ($S + B$). Com ela, (2.26) agora corresponde a

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & - \sum_{\omega} \{ \gamma_3(\omega) (A^\dagger(\omega)A(\omega)\rho_S(t) - A(\omega)\rho_S(t)A^\dagger(\omega)) + \\ & + \gamma_4(\omega) (\rho_S(t)A(\omega)A^\dagger - A^\dagger(\omega)\rho_S(t)A^\dagger(\omega)) + h.c. \}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A expressão acima carrega toda a informação que queremos sobre a dinâmica de ρ_S , porém a forma em que ali está expressada não deixa isso muito claro. Sendo assim, vamos decompor $A^\dagger(\omega)A(\omega)\rho_S(t)$ e $\rho_S(t)A(\omega)A^\dagger(\omega)$ em uma parte simétrica e outra antissimétrica, a saber

$$A^\dagger(\omega)A(\omega)\rho_S(t) = \frac{1}{2} \{ A^\dagger(\omega)A(\omega), \rho_S(t) \} + \frac{1}{2} [A^\dagger(\omega)A(\omega), \rho_S(t)] \quad (2.28)$$

e

$$\rho_S(t)A(\omega)A^\dagger(\omega) = \frac{1}{2} \{ \rho_S(t), A(\omega)A^\dagger(\omega) \} + \frac{1}{2} [\rho_S(t), A(\omega)A^\dagger(\omega)], \quad (2.29)$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & \\ = \sum_{\omega} \left\{ \frac{(\gamma_3^*(\omega) - \gamma_3(\omega))}{2} [A^\dagger(\omega)A(\omega), \rho_S(t)] + \frac{(\gamma_4(\omega) - \gamma_4^*(\omega))}{2} [A(\omega)A^\dagger(\omega), \rho_S(t)] + \right. & \\ \left. + \frac{\gamma_3(\omega) + \gamma_3^*(\omega)}{2} \mathcal{D}[A(\omega)](\rho_S(t)) + \frac{\gamma_4(\omega) + \gamma_4^*(\omega)}{2} \mathcal{D}[A^\dagger(\omega)](\rho_S(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo $\mathcal{D}[L]$ um superoperador tal que quando aplicado em um estado ρ resulta em

$$\mathcal{D}[L](\rho) \equiv L\rho L^\dagger - \frac{1}{2} \{ L^\dagger L, \rho \}. \quad (2.31)$$

Por fim, escrevendo

$$\gamma_3(\omega) = \gamma_+(\omega) + i\lambda_+(\omega) \quad \text{e} \quad \gamma_4(\omega) = \gamma_-(\omega) + i\lambda_-(\omega), \quad (2.32)$$

com $\gamma_+(\omega), \gamma_-(\omega), \lambda_+(\omega), \lambda_-(\omega) \in \mathbb{R}$, temos que

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H_{LS}, \rho_S(t)] + \sum_{\omega} \{ \gamma_+(\omega) \mathcal{D}[A(\omega)] \rho_S(t) + \gamma_-(\omega) \mathcal{D}[A^\dagger(\omega)] \rho_S(t) \} \quad (2.33)$$

é a equação dinâmica para o sistema S em contato com o banho B , cuja evolução unitária é dada pela hamiltoniana (renormalizada) local

$$H_{LS} \equiv \sum_{\omega} \{ \lambda_+(\omega) A^\dagger(\omega) A(\omega) + \lambda_-(\omega) A(\omega) A^\dagger(\omega) \}, \quad (2.34)$$

enquanto a influência do ambiente (dissipação) é contabilizada pelos superoperadores $\mathcal{D}[L]$.

Vale ressaltar que a propriedade dos operadores $A^\dagger(\omega)A(\omega)$ se conservarem localmente (eq. 2.16) implica que H_S e H_{LS} são operadores compatíveis. De fato, o espectro de H_{LS} é equivalente ao de H_S a menos de desvios proporcionais à λ_{\pm} , denominados *Lamb shift*. Isso pode ser visto de modo mais lúdico na representação de Schrodinger, em que a hamiltoniana total do sistema é dada por $(H_S + H_{LS})$, o que ressalta o fato de que o espectro do sistema é o de H_S em adição ao de H_{LS} . Para os casos de interesse desse trabalho, tal desvio se faz desprezível, de modo que, doravante, desprezaremos a influência de H_{LS} frente a de H_S , como de costume na literatura.

A equação dinâmica (2.33) foi obtida sob uma série de premissas, sendo as principais delas resumidas em: (I) estamos interessados em um único sistema em contato com um único banho; (II) o banho pode ser considerado um reservatório termodinâmico para o sistema, de sorte que representa um estado estacionário; (III) a evolução do sistema é markoviana e; (IV) a hamiltoniana de interação é conservativa (eq. 2.9). Essa última aproximação é a responsável por não termos os termos mistos presentes no dissipador de Lindblad geral (1.18), uma vez que eles carregam termos não conservativos (e.g., o sistema e o banho perderem excitações ao mesmo tempo). Poderíamos abrir mão dessa aproximação e definirmos uma hamiltoniana de interação geral na forma

$$H_I(0) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha} \otimes B_{\beta} \quad (2.35)$$

que, em conjunto das demais suposições, levariam à (1.18). Entretanto, como nosso in-

teresse nesse trabalho estará voltado à sistemas e banhos que interagem por intermédio de (2.9), optamos por simplificar nossas contas fazendo essa escolha mais simples. As afirmações (II) e (III) são razoáveis do ponto de vista físico, principalmente em Termodinâmica Quântica, na qual geralmente o banho é descrito por um sistema clássico. Enfim, a premissa (I) é possivelmente a que mais pareça limitar nossas possibilidades de estudo, uma vez que fixa nossa análise apenas para sistemas singulares em contato com um único banho. Não obstante, veremos a seguir que esse não é necessariamente o caso, uma vez que podemos sempre usar a equação mestra (2.33) para alcançar uma descrição de sistemas físicos mais robustos.

2.2 Da Equação Mestra Global para uma Rede de Férmions

Considere um sistema composto por n sistemas S_n menores e m banhos B_m . Uma primeira abordagem óbvia para elaborarmos uma equação mestra que descreva a dinâmica do estado ρ_t de $\sum_n S_n$, é a de dividirmos nosso sistema composto em nm -uplas na forma $\{(S_n + B_m)\}$, de modo que cada elemento desse conjunto nos garanta um estado $\rho_{nm}^{S_n}$ que respeite a evolução temporal (2.33). Assim, tratando cada uma dessas dinâmicas como independentes, basta que somemos cada uma de suas contribuições para alcançarmos uma equação que englobe o sistema total. Não obstante, esse método é válido apenas se for possível desprezarmos a interação dos subsistemas entre si, sendo uma boa abordagem apenas em um regime de acoplamento fraco entre as entidades S_n . De fato, essa ainda é uma abordagem local.

Tendo isso em mente, no intuito de entendermos melhor como uma equação mestra puramente global pode ser construída com base em (2.33), vamos averiguar um sistema particular, mas extremamente útil: uma rede de N férmions conectados em linha, na qual a primeira partícula está conectada com um reservatório térmico e de partículas de temperatura T_1 e potencial químico μ_1 , enquanto o N -ésimo está plugado em outro de temperatura T_N e potencial químico μ_N (Figura 2.1)⁵.

⁵Embora nosso trabalho gire em torno de um sistema bosônico e um fermiônico acoplados, estamos dando enfoque à uma rede de férmions nessa seção. Isso porque o resultado que iremos derivar já é conhe-

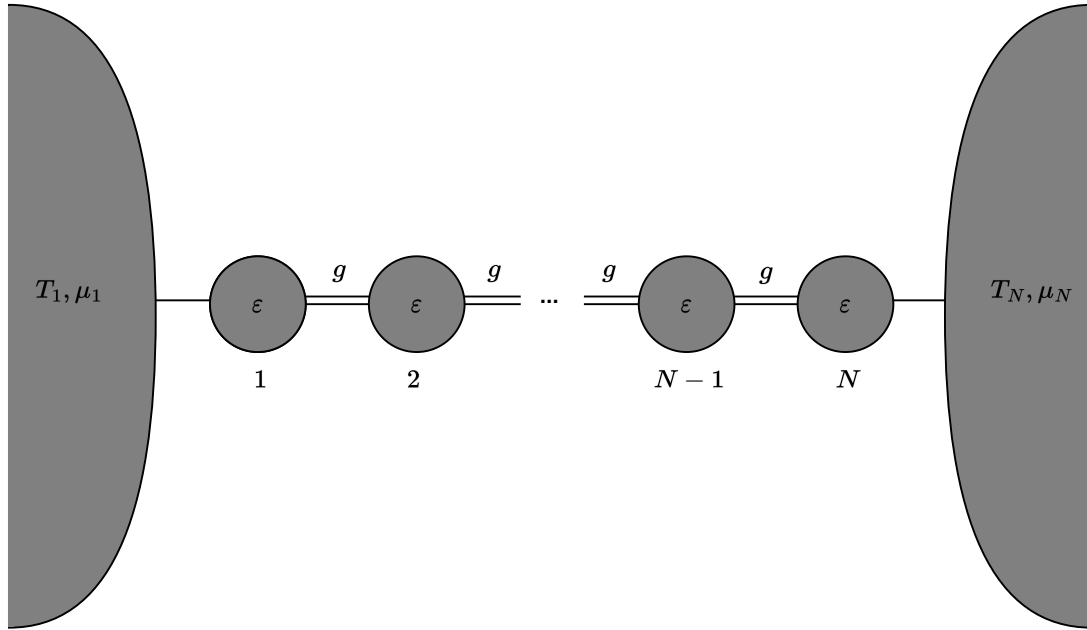


Figura 2.1: Rede de férmions. N férmions acoplados em cadeia. O primeiro férmion está acoplado com um reservatório térmico e de partículas de temperatura T_1 e potencial químico μ_1 , enquanto o N -ésimo está acoplado com um reservatório de temperatura T_N e potencial químico μ_N . Os demais férmions interagem apenas com seus primeiros vizinhos, com intensidade g . Todos eles possuem a mesma energia ε .

Desprezando interações de natureza elétrica entre partículas de diferentes sítios, a rede de férmions pode ser descrita pela hamiltoniana de primeiros vizinhos

$$H_S = \varepsilon \sum_{n=1}^N c_n^\dagger c_n - \frac{g}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n), \quad (2.36)$$

em que o primeiro termo representa as contribuições de energia de cada sítio livre, enquanto o segundo descreve o tunelamento de férmions entre os diferentes sítios. Ademais, como estamos lidando com entidades fermiônicas, vale a álgebra (1.22) para os operadores c_n e c_n^\dagger .

No tocante aos banhos, temos que

$$H_{B,n} = \sum_l \Omega_l b_{l,n}^\dagger b_{l,n} \quad (2.37)$$

garante suas dinâmicas livres, sendo $b_{l,n}$ o l -ésimo operador de Fermi do banho n , $\{\Omega_l\}$ o

cido para uma rede de bósons [17], de sorte que iremos reaproveitar estes resultados e, com um raciocínio similar ao apresentado na referência citada, vamos lidar apenas com uma rede fermiônica.

espectro de energias permitidas pelos banhos e $n = 1, N$ representando, respectivamente, o banho da esquerda e o da direita. Esse tipo de hamiltoniano caracteriza uma vasta gama de reservatórios, uma vez que é mapeável a quaisquer sistemas que podem ser descritos por hamiltonianos quadráticos.

Por último, devemos levar em conta as hamiltonianas $H_{I,n}$ que descrevem as interações sistema-banho. Como apenas o primeiro e o N -ésimo sítios sofrem a influência direta dos reservatórios, segue que

$$H_{I,n} = \sum_l \theta_{l,n} \left(b_{l,n}^\dagger c_n + c_n^\dagger b_{l,n} \right), \quad n = 1, N, \quad (2.38)$$

é uma descrição do acoplamento entre o sistema e o ambiente que preserva excitações, com $\theta_{l,n}$ sendo as constantes que caracterizam a intensidade da interação para cada modo l do banho n . Uma vez que a energia é uma quantidade aditiva, segue que a hamiltoniana total do sistema composto ($S + B$) é garantida por

$$H_R = H_S + H_{B,1} + H_{B,N} + H_{I,1} + H_{I,N}. \quad (2.39)$$

Agora, da construção feita na seção anterior, sabemos que a dinâmica da rede de férmions pode ser separada em duas partes: na evolução unitária, dada por $i[\rho_S, H_S]$, e na interação com o banho, descrita pelos dissipadores (2.31). Tendo em vista que já conhecemos essa primeira parte (vide que temos H_S), vamos dedicar nossos esforços apenas na dinâmica aberta descrita por $\mathcal{D}[L](\rho_S)$. Para isso, vale lembrar que uma de nossas premissas na derivação da equação mestra anterior era a de que o estado ρ_B do banho é estacionário, de modo que, para esse caso, podemos escrever

$$\rho_{B,n} = \bigotimes_{l=1} \rho_{l,n}, \quad n = 1, N, \quad (2.40)$$

como sendo o operador estatístico que descreve o estado do banho n , em que

$$\rho \equiv \frac{\exp\left\{-\beta_n (\Omega_l - \mu_n) b_{l,n}^\dagger b_{l,n}\right\}}{\text{Tr}\left\{\exp\left\{-\beta_n (\Omega_l - \mu_n) b_{l,n}^\dagger b_{l,n}\right\}\right\}} \quad (2.41)$$

é a matriz densidade de cada modo do reservatório n , com $\beta_n \equiv T_n^{-1}$. Isto é, ambos os banhos estão em equilíbrio térmico e de partícula, o que nos permite representar cada um de seus modos independentes por estados de Gibbs⁶.

Tendo a forma explícita de $\rho_{B,n}$ e $H_{B,n}$, somos capazes de avaliar as partes reais γ_{\pm}^n das funções de correlação $\gamma_{3,4}^{(n)}$ (eqs. 2.22 e 2.23) para cada um dos banhos, quantidade esta que caracteriza a intensidade da troca de excitações de um dado tipo entre o sistema e o ambiente. Com esse objetivo, ao compararmos as equações (2.9) e (2.38), segue que

$$\begin{aligned} B^{(n)}(0) &= \sum_l \theta_{l,n} b_{l,n} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^{(n)}(t) &= \sum_l \theta_{l,n} e^{iH_{B,n}t} b_{l,n} e^{-iH_{B,n}t} = \sum_l \theta_{l,n} e^{-i\Omega_l t} b_{l,n}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que usamos o fato de que $b_{l,n}$ é auto operador de $H_{B,n}$. Disso, segue que

$$\text{Tr}\{\rho_{B,n} B^{(n)\dagger}(0) B^{(n)}(t)\} = \sum_{l,k} \theta_{l,n} \theta_{k,n} e^{-i\Omega_l t} \text{Tr}\{\rho_{B,n} b_{l,n}^\dagger b_{k,n}\}, \quad (2.43)$$

mas, sendo $b_{l,n}^\dagger$ e $b_{k,n}$ independentes quando $l \neq k$ (vide 1.22), podemos dizer que, nesse caso, $\text{Tr}\{\rho_{B,n} b_{l,n}^\dagger b_{k,n}\} = \text{Tr}\{\rho_{B,n} b_{l,n}^\dagger\} \text{Tr}\{\rho_{B,n} b_{k,n}\} = 0$, uma vez que $\text{Tr}\{\rho_{B,n} B^n(0)\} = 0$ (condição 2.25). Destarte, e usando a decomposição (2.40), sai que

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\rho_{B,n} B^{(n)\dagger}(0) B^{(n)}(t)\} &= \sum_l \theta_{l,n}^2 e^{-i\Omega_l t} \prod_j \text{Tr}\{\rho_{j,n} b_{l,n}^\dagger b_{l,n}\} = \\ &= \sum_l \theta_{l,n}^2 e^{-i\Omega_l t} \text{Tr}\{\rho_{l,n} b_{l,n}^\dagger b_{l,n}\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

em que usamos a propriedade $\text{Tr}\{\otimes_i M_i\} = \prod_i \text{Tr}\{M_i\}$ válida para qualquer conjunto de matrizes $\{M_i\}$, bem como a condição de normalização $\text{Tr}\{\rho_i\} = 1$ para eliminarmos o produtório em j . Lembrando agora que o valor do traço independe do referencial escolhido, vamos calculá-lo na base binária⁷ $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ dos autoestados do operador $b_{l,n}^\dagger b_{l,n}$,

⁶Lembre-se que um estado de Gibbs no formalismo grande canônico é dado por $\rho_G \sim \exp\{-\beta(H - \mu N)\}$. No nosso caso, $H = H_{B,n}$ (eq. 2.37) e $N = \sum_l b_{l,n}^\dagger b_{l,n}$.

⁷Lembre-se do princípio de exclusão de Pauli.

i.e.,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left\{\rho_{l,n}b_{l,n}^\dagger b_{l,n}\right\} &= \sum_{m_l=0}^1 \langle m_l | \rho_{l,n}b_{l,n}^\dagger b_{l,n} | 1 \rangle = \langle m_l | \rho_{l,n} | 1 \rangle = \\ &= \frac{1}{\exp\{\beta_n(\Omega_l - \mu_n)\} + 1} \equiv f_n(\Omega_l) \end{aligned} \quad (2.45)$$

que nada mais é do que uma distribuição de Fermi-Dirac. Disso, segue que

$$\text{Tr}\left\{\rho_{B,n}B^{(n)\dagger}(0)B^{(n)}(t)\right\} = \sum_l f_n(\Omega_l)\theta_{l,n}^2 e^{-i\Omega_l t} \quad (2.46)$$

e em consequência disso (eq.2.23)⁸,

$$\begin{aligned} \gamma_4^{(n)}(\omega) &= \sum_l f_n(\Omega_l)\theta_{l,n}^2 \int_0^\infty dt e^{i(\omega - \Omega_l)t} \therefore \\ \therefore \gamma_-^{(n)}(\omega) &= \text{Re}\left\{\gamma_4^{(n)}(\omega)\right\} = \pi \sum_l f_n(\Omega_l)\theta_{l,n}^2 \delta(\omega - \Omega_l), \end{aligned} \quad (2.47)$$

em que usamos a transformada de Fourier para a delta de Dirac no último passo. De modo completamente análogo, mas usando (2.22) ao invés de (2.23), obtemos

$$\gamma_+^{(n)}(\omega) = \text{Re}\{\gamma_3(\omega)\} = \pi \sum_l (1 - f_n(\Omega_l))\theta_{l,n}^2 \delta(\omega - \Omega_l). \quad (2.48)$$

Como já havíamos constatado na seção anterior, as funções de correlação independem do tempo, sendo sensíveis apenas às peculiaridades do banho (nesse caso, energia, temperatura e potencial químico).

Com os resultados acima em mãos, resta que identifiquemos os operadores $A_1(\omega)$ e $A_N(\omega)$ de $H_{I,n}$ correspondente à $A_1 = a_1$ e $A_N = a_N$ (compare 2.9 com 2.38). Nesse intuito, vamos diagonalizar a hamiltoniana H_S do sistema (2.36) por intermédio de uma transformação de Bogoliubov, a saber parametrizando os operadores de aniquilação a_n como

$$a_n = \sum_k S_{n,k}\eta_k, \quad (2.49)$$

⁸Aqui, escolhemos $\xi = t$.

tal que

$$S_{n,k} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi nk}{N+1}\right), \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (2.50)$$

Isso porque, como

$$\sum_{n=1}^N S_{n,k} S_{j,n} = \delta_{jk}, \quad (2.51)$$

é imediato ver que

$$H_S = \sum_j E_j \eta_j^\dagger \eta_j, \quad E_j \equiv \varepsilon - g \cos\left(\frac{\pi j}{N+1}\right), \quad (2.52)$$

bastando que utilizemos a identidade $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ e a ortogonalidade entre as funções senos e cossenos. Disso, segue imediatamente que η_k e η_k^\dagger são autooperadores de H_S com autovalores⁹ $\pm E_k$, nos induzindo a identificar

$$A_n(\omega) = \sum_k S_{n,k} \eta_k \delta_{\omega, E_k}, \quad (2.53)$$

uma vez que

$$[H_S, A_n(\omega)] = \sum_k [H_S, \eta_k] S_{n,k} \delta_{\omega, E_k} = -\omega A_n(\omega) \quad (2.54)$$

e

$$\sum_\omega A_n(\omega) = \sum_k S_{n,k} \eta_k(E_k) = A_n = a_n, \quad (2.55)$$

condições necessárias e suficientes para que $A_n(\omega)$ descreva uma dinâmica aberta, como já visto.

Finalmente, temos todas as entidades necessárias para descrevermos o dissipador global do nosso modelo. Para obtê-lo, basta substituímos (2.47), (2.48) e (2.53) no segundo termo do lado direito de (2.33), vide que ele é quem contabiliza as trocas de excitações sistema-banho. Explicitamente, segue que

$$\mathcal{D}_n^{(G)} = \sum_{k,l} \pi \theta_{l,n}^2 \delta(E_k - \Omega_l) S_{n,k}^2 \left[(1 - f_n(E_k)) \mathcal{D}[\eta_k] + f_n(E_k) \mathcal{D}[\eta_k^\dagger] \right] \quad (2.56)$$

⁹Relembre da discussão feita na seção 1.4

é a quantidade que retém as dissipações oriundas da interação do sistema com o banho¹⁰ n . É interessante notar que o resultado acima nos diz que a dissipação em um sítio não afeta apenas ele, mas sim todos os modos na rede, i.e., as interações passam a ter um caráter global. Essa informação está contida na somatório em k , que correlaciona as perturbações ocorridas no n -ésimo férmion com os demais sítios do sistema. Em outras palavras, podemos imaginar cada interação com o banho como sendo transitiva, passando de um sítio a outro, a começar pelos extremos. Não obstante, sendo essa interação não local, para o caso de N grande essa descrição é pouco realista, vide que nos permitiria uma troca de informação instantânea entre quaisquer dois pontos da rede. Assim, o resultado acima é válido para um regime em que N possa ser considerado pequeno¹¹, antagonicamente à abordagem local discutida no início dessa seção.

A construção feita nesse capítulo buscou elucidar quais aproximações físicas estão inseridas em nossos resultados, o que nos permite justificar a escolha de abordagem feita ao estudar o acoplamento entre uma cavidade ressonante e um DQD. Assim, estamos prontos para investir nosso tempo na modelagem teórica geral de um detector de fótons, sistema central desta dissertação.

¹⁰À título de completude, a dinâmica total do sistema será dada por

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}_1^{(G)} + \mathcal{D}_N^{(G)}.$$

¹¹Estritamente falando, os resultados acima são válidos quando o tempo de transmissão de informações entre dois pontos quaisquer da rede forem muito maiores que o tempo de relaxamento do sistema, de sorte que podem ser considerados instantâneos como boa aproximação. Uma vez que o tempo de propagação é, em geral, inversamente proporcional ao tamanho da rede, optamos por simplificar a discussão em termos de N .

Capítulo 3

Cavidade Óptica Acoplada com um Ponto Quântico Duplo

Na seção 1.4, discutimos a modelagem da dinâmica aberta de sistemas bosônicos e fermiônicos. Em particular, averiguamos separadamente uma cavidade de Kerr como exemplo de sistema do primeiro tipo, bem como o ponto quântico duplo como exemplo de sistema do segundo gênero. Neste capítulo, vamos analisar um sistema composto descrito pelo acoplamento de uma cavidade óptica (cavidade linear, em que $K = 0$ e $\Lambda_d = 0 \forall d \neq 1$) com um DQD, tendo em vista sua ampla aplicabilidade prática e suas consequências teóricas [2, 4, 5, 19].

De um ponto de vista qualitativo, podemos dizer que o acoplamento entre esses dois sistemas se dá quando inserimos o DQD dentro da região do espaço englobada pelos dois extremos da cavidade óptica. Com isso, um feixe externo monocromático é usado para bombardear fótons para dentro da cavidade. Caso não ocorra o vazamento de um fóton (perdas para o meio), ele interage com os elétrons do DQD, de sorte que seus estados são modificados (ver Figura 3.1).

Métodos usuais para se detectar fótons em ótica quântica consistem no uso dos chamados diodos óticos, instrumentos os quais permitem a detecção indireta de um fóton por intermédio da absorção do mesmo por elétron, em que cria-se um par elétron-buraco que é separado pelo material e observado em forma de corrente elétrica [5]. Entretanto, fótons com frequência na escala de microondas são tais que suas energias são de quatro à cinco ordens de magnitude menores do que as diferenças de energia das bandas dos se-

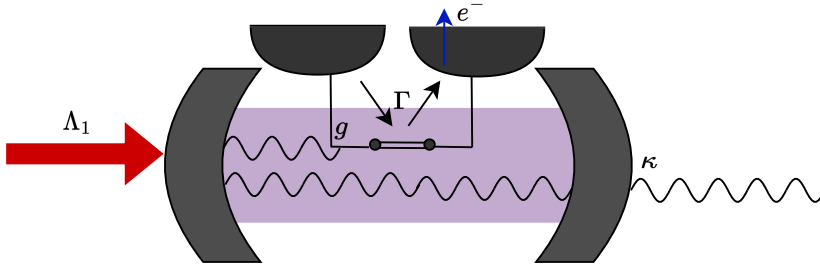


Figura 3.1: Cavidade de óptica acoplada com um ponto quântico duplo. Diferente da Figura 1.1, o bombeio de fótons na cavidade é feita por intermédio de um feixe calibrado por Λ_1 que carrega um valor médio N de fótons de uma dada frequência de interesse. O ponto quântico duplo, acoplado com a cavidade por intermédio de uma constante de acoplamento g , funciona da mesma maneira como detalhado na Figura 1.3, mas agora as taxas de tunelamento são tais que $\Gamma_{0g} = \Gamma_{e0} \equiv \Gamma$. Com isso, os fótons oriundos do bombeio descrito por Λ_1 que entram na cavidade óptica podem ter dois destinos: (i) interagir com o ponto quântico duplo, fazendo com que o elétron no estado fundamental vá para o estado excitado e, por conseguinte, tunele para o reservatório da direita, fazendo com que seja detectado uma fotocorrente ou; (ii) interagir com o ponto quântico duplo, posteriormente vazando da cavidade à uma taxa κ . Por essa possível aplicabilidade na detecção indireta de um fóton, muitas vezes esse aparato é usado como um detector de fótons [19].

micondutores conhecidos, de modo que sua detecção se torna impraticável. Com isso, se faz necessária a busca de métodos alternativos para lidar com essa escala de energia. Um modelo proeminente que vêm sendo utilizado para esse fim é justamente o acoplamento descrito acima, em que ajusta-se as constantes de acoplamento de tal forma que: (I) sempre exista um elétron no estado fundamental do DQD; (II) a probabilidade do elétron no estado fundamental tunelar para algum dos reservatórios é baixa; (III) a probabilidade de um elétron no estado excitado tunelar é alta para o reservatório R e baixa para quaisquer outros casos e; (IV) a probabilidade de vazamento de um fóton é baixa. Essas características garantem o regime de um “fotodetector ideal” e serão exploradas quantitativamente no capítulo 5. Por ora, vale frisar que essas aproximações garantem que um fóton que entre na cavidade óptica sempre irá interagir com um elétron do poço que está no estado fundamental, de modo que este irá absorvê-lo, ficar no estado excitado e tunelar para o reservatório R , sendo passível a ser detectado na forma de uma fotocorrente. Essa medição nos diz indiretamente que um fóton foi absorvido pelo sistema.

Dadas as motivações, vamos agora nos atentar as propriedades gerais do acoplamento de um ponto quântico duplo com uma cavidade óptica. Começamos por olhar a hamil-

toniana H que versa sobre a dinâmica unitária desse sistema. Ela pode ser descrita pela composição das contribuições do DQD livre, da caverna livre, do acoplamento caverna-bombeio e do acoplamento caverna-DQD. Isto é,

$$H = H_{DQD} + H_C + H_{CB} + H_{CO-DQD}. \quad (3.1)$$

A primeira é dada pela equação (1.47). A segunda e a terceira são dadas por (1.31) no regime da caverna óptica, a saber

$$H_C + H_{CB} \equiv H_{CO} = \omega_r a^\dagger a + \xi (e^{i\omega_l t} a^\dagger + e^{-i\omega_l t} a), \quad (3.2)$$

em que parametrizamos Λ_1 na forma $\Lambda_1 \equiv \xi e^{i\omega_l t}$ ($\xi \in \mathbb{R}$), ou seja, escolhemos um feixe de partículas que, em média, garantirá fótons de frequência ω_l para a aplicação de um bombeio de intensidade ξ ¹. Por fim, o quarto termo H_{CO-DQD} referente a interação caverna-DQD pode ser feito se levarmos em conta uma hamiltoniana conservativa na forma (2.9), i.e.,

$$H_{CO-DQD} = g (a^\dagger \sigma_+^\dagger + a \sigma_+), \quad (3.3)$$

em que σ_+ é definido por (1.44) e a intensidade do acoplamento é dada por g . Repare que esse termo nos diz que quando um fóton é perdido na caverna, um elétron sai do estado fundamental e vai para o estado excitado, absorvendo-o. Caso contrário, quando um fóton é gerado dentro da caverna, significa que ele foi emitido por um elétron excitado, este decaindo pro seu estado fundamental no processo.

Juntando os termos acima e aplicando a unitária $\mathcal{U} = \exp\{i\omega_l t (a^\dagger a + \sigma_3/2)\}$ para trabalharmos no referencial girante², segue que [5]

$$\tilde{H} = \Delta_d \frac{\sigma_3}{2} + \Delta_r a^\dagger a + g (a^\dagger \sigma_+^\dagger + a \sigma_+) + \xi (a^\dagger + a) \quad (3.4)$$

é o hamiltoniano que descreve a evolução unitária de um ponto quântico duplo acoplado

¹Vale lembrar que, usando (1.27), segue que $\langle a_l(t) \rangle \sim e^{-i\omega_l t}$ e $\langle a_l^\dagger(t) \rangle \sim e^{i\omega_l t}$, de sorte que a quantidade proporcional a ξ possui a forma da hamiltoniana de interação conservativa que estamos habituados (eq. 2.9).

²Lembre-se que a hamiltoniana H se transforma como $H \rightarrow \tilde{H} = \mathcal{U} H \mathcal{U}^\dagger + i (\partial_t \mathcal{U}) \mathcal{U}^\dagger$ sobre a unitária \mathcal{U} quando queremos avaliar a dinâmica de um sistema sob esta transformação.

com uma caverna óptica, com $\Delta_d \equiv \Omega - \omega_l$ ($\Delta_r \equiv \omega_r - \omega_l$) sendo a diferença de frequência entre o DQD (caverna) e o pump.

Agora, nos resta descrever as possíveis dissipações desse sistema. Como o vazamento de fótons da caverna e o vazamento de elétrons do DQD são fenômenos independentes, podemos construir os dissipadores para esses dois casos separadamente e, por intermédio de uma abordagem local, juntá-los. Entretanto, para averiguarmos os dissipadores do DQD, a abordagem global construída no capítulo anterior se faz útil. Com isso em mente, vamos começar pela construção da dinâmica aberta do ponto duplo quântico.

Como estamos lidando com dois férmions em rede, cada qual acoplado com um reservatório térmico e de partículas distintos, podemos, em princípio, usar a equação (2.56) com $N = 2$ para extrairmos o dissipador desejado. Antes disso, entretanto, vale notar que o interesse prático que temos em nosso sistema, nos permite simplificarmos ainda mais nosso modelo. Primeiro, não estamos interessados em fluxos de energia que não sejam descritos pela interação dos fótons do feixe com os elétrons do DQD, de modo que vamos assumir equilíbrio termodinâmico entre os reservatórios (i.e., $T_1 = T_2 \equiv T$ e $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$). Com isso, as distribuições de Fermi-Dirac se reduzem à $f_1(E_k) = f_2(E_k) \equiv f(E_k)$. Ademais, trabalhando no regime de $T = 0$, vamos fixar μ tal que $f(E_1) = 1$ e $f(E_2) = 0$, pois assim induzimos o sistema a ter transições do reservatório da esquerda para o sítio da esquerda, mas nunca do reservatório da direita para o sítio da direita. Essa suposição constituiu uma parte fundamental na construção de um fotodetector ideal. Destarte, é direto ver que a equação (2.56) se reduz à

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^{(G)} = \sum_l \pi \delta(E_k - \Omega_l) \theta_{l,n}^2 \left\{ S_{n,1}^2 D[\eta_1^\dagger] + S_{n,2}^2 D[\eta_2] \right\}, \quad (3.5)$$

contendo assim o termo de dissipação da dinâmica do DQD referente ao reservatório acoplado ao sítio n .

Da presença dos dissipadores $D[\eta_1^\dagger]$ e $D[\eta_2]$ na equação acima, vemos que as aproximações feitas favorecem a criação de elétrons no estado fundamental $|g\rangle$ ($\eta_1^\dagger \eta_1 |g\rangle = E_1 |g\rangle$) e a aniquilação de elétrons no estado excitado $|e\rangle$ ($\eta_2^\dagger \eta_2 |e\rangle = E_2 |e\rangle$). Isso é condicente com a nossa premissa, uma vez que $\tilde{\mathcal{D}}_n^{(G)}$ favorece o acúmulo de elétrons no DQD que estejam no estado fundamental. Em particular, como estamos no regime de *Coulomb*

blockade, a descrição acima nos garante a preferência do sistema de sempre ter um único elétron nesse estado à nossa disposição.

Repare que a atuação de η_k nos autoestados $\{|g\rangle, |0\rangle, |e\rangle\}$ do hamiltoniano do sistema nos permite parametrizá-los como³

$$\eta_1 = s_g \quad \text{e} \quad \eta_2 = s_e, \quad (3.6)$$

com s_g e s_e dados em (1.44). Com isso, podemos escrever o dissipador completo para o DQD como sendo

$$\sum_n \tilde{\mathcal{D}}_n^{(G)} = \Gamma_{g0} \mathcal{D}[s_g^\dagger] + \Gamma_{0e} \mathcal{D}[s_e], \quad (3.7)$$

em que definimos as constantes de dissipação

$$\Gamma_{g0} \equiv \pi \sum_l \delta(E_k - \Omega_l) (\theta_{l,1}^2 S_{1,1}^2 + \theta_{l,2}^2 S_{2,1}^2) \quad (3.8)$$

e

$$\Gamma_{0e} \equiv \pi \sum_l \delta(E_k - \Omega_l) (\theta_{l,1}^2 S_{1,2}^2 + \theta_{l,2}^2 S_{2,2}^2). \quad (3.9)$$

Alguns comentários se fazem pertinentes em relação ao resultado que obtemos. Primeiramente, ele não só equivale ao dissipador presente em (1.47) que intuimos na construção quantitativa da dinâmica aberta do DQD, como também nos diz a forma que as constantes de dissipação desse problema se relacionam com as constantes de acoplamento que descrevem a intensidade de interação entre o DQD e seus reservatórios termodinâmicos. Em especial, vemos que essa dissipação é tão mais forte quanto for o acoplamento entre essas entidades, como era de se esperar. Ademais, vale notar que dissipações na forma $\mathcal{D}[s_g^\dagger]$, $\mathcal{D}[s_e^\dagger]$, $\mathcal{D}[\sigma_+]$ e $\mathcal{D}[\sigma_+^\dagger]$ não apareceram em nosso resultado final devido as premissas que adotamos para obtê-lo. Em particular, quando fixamos μ para priorizar a existência de partículas no estado fundamental, eliminamos diversas possibilidades de configuração do nosso sistema, o que influenciou diretamente na não aparição desses termos. Caso tivéssemos optado por não fazer nenhuma dessas aproximações, apenas usando (2.56) para $N = 2$, obteríamos uma dissipador equivalente a (1.46). A escolha dessa omissão foi

³Uma outra forma de ver isso é aplicando a transformação inversa de (2.49) e usar o fato de que no regime de *Coulomb blockade* $a_1 \approx |0\rangle \langle L|$ e $a_2 \approx |0\rangle \langle R|$.

feita por estarmos interessados no regime de um fotodetector ideal, como já discutido, de modo que priorizamos a simplicidade em nossas demonstrações.

Usando o mesmo raciocínio acima, mas partindo do dissipador global para uma rede de bósons [17], podemos obter que o único dissipador de interesse para o caso do vazamento de um único fóton é um na forma $\mathcal{D}[a]$, com constante de dissipação κ . Isto é, κ nos diz com que intensidade fótons podem vazar da nossa cavidade ao invés de serem absorvidos por um elétron do ponto quântico duplo. Essa constante é proporcional a intensidade do feixe que usamos para bombardear a cavidade, uma vez que esta está relacionada com o número de fótons que colidem na cavidade por unidade de tempo [5]. Por ser um resultado conhecido e de demonstração análoga à aqui presente para o caso do DQD, vamos apenas enunciá-lo. Assim, a dinâmica total do acoplamento de uma cavidade óptica com um ponto quântico duplo no regime de um fotodetector ideal é dada por

$$\dot{\rho} = -i \left[\tilde{H}, \rho \right] + \Gamma_{g0} \mathcal{D}[s_g^\dagger] \rho + \Gamma_{0e} \mathcal{D}[s_e] \rho + \kappa \mathcal{D}[a] \rho. \quad (3.10)$$

É importante notar que apesar dos modos fermiônicos viverem em um espaço de Hilbert tridimensional e serem tratáveis analiticamente, os modos bosônicos do banho geralmente são vastos, fazendo com que diferentes métodos teóricos sejam utilizados para se extrair a física da dinâmica (3.10). Análises gerais da natureza da fotocorrente gerada pelo sistema, incluindo quantidades como a eficiência da transformação dos fótons emitidos pelo bombardeio em corrente elétrica, foram feitas por intermédio do formalismo de estatística de contagem total (*full counting statistics*) [4, 5]. Assim, um próximo passo natural na análise desse modelo, é buscar extrair explicitamente as probabilidades de um fóton que adentrou no sistema vazar ou, equivalentemente, de ao bombearmos o sistema com um fóton, uma corrente elétrica ser detectada (i.e., um elétron do DQD sair do estado fundamental, ir para o excitado e tunelar para o reservatório na forma de corrente elétrica, como na Figura 3.1). Tendo como objetivo averiguarmos propriedades dessa natureza em nosso modelo, vamos introduzir o formalismo da estatística de tempo de espera, que nos possibilitará traduzir os pulos possíveis de nosso sistema para distribuição de probabilidades.

Capítulo 4

Estatística de Tempo de Espera

Esse capítulo tem como base [6, 7].

Nos exemplos dados na seção anterior, fica claro que o estudo da dinâmica aberta de um sistema tem seu núcleo na análise dos “pulos” que este é submetido por trocar excitações com um meio. Sendo assim, para todos os efeitos, podemos imaginar que a evolução temporal de um estado ρ é caracterizado por uma sequência de pulos quânticos, coordenados pelos operadores L_k em (1.17). No intuito de descrevermos a frequência com que essas flutuações ocorrem, bem como quantificar a probabilidade de um tipo de pulo ocorrer comparado a outro, vamos construir uma *distribuição de tempo de espera* (*waiting time distribution, WTD*) que seja condizente com a aleatoriedade de ocorrência desses fenômenos.

O primeiro passo para alcançarmos nosso objetivo será segregar nossa dinâmica em termos de pulos quânticos que conseguimos monitorar daqueles que não somos capazes de fazê-lo, estes os quais irão catalogar uma evolução sem pulos. Para tal, vamos reescrever a equação de Lindblad (1.17) na forma

$$\dot{\rho}(t) = -i \left(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right) + \sum_j \gamma_j L_j \rho L_j^\dagger, \quad (4.1)$$

em que consideramos $\gamma_{ij} = \delta_{ij} \gamma_j$ e definimos a hamiltoniana efetiva

$$H_{\text{eff}} \equiv H - \frac{i}{2} \sum_j \gamma_j L_j^\dagger L_j. \quad (4.2)$$

Esta última definição se faz útil pois enfatiza o fato de que os anticomutadores $\{L_j^\dagger L_j, \rho\}$ presentes na equação mestra podem ser vistos como uma reparametrização das energias do sistema, feita de tal modo à conservar o traço da matriz densidade. Isso quer dizer que toda a descrição relevante dos pulos quânticos está contida nos superoperadores

$$\mathcal{L}_j(\rho) = L_j \rho L_j^\dagger, \quad (4.3)$$

consequentemente nos permitindo definir o operador

$$\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L} - \sum_{j \in \mathcal{M}} \mathcal{L}_j \quad (4.4)$$

que descreve a evolução sem pulos, sendo \mathcal{M} o conjunto dos saltos que somos capazes de monitorar e \mathcal{L} o chamado Liouvilliano do sistema (vide eq. 1.19). O conjunto \mathcal{M} pode ser visto como as dissipações que ocorrem no sistema que somos capazes ou estamos interessados em detectar, ou seja, ele contém todos os canais em que podemos inferir perdas ou ganhos do sistema¹. Destarte, nossa equação dinâmica pode ser dividida em termos do tipo \mathcal{L}_j e \mathcal{L}_0 , i.e., quantidades que representam saltos e outras que não o fazem.

Para explicitar como essa divisão se dá, vamos fazer uma decomposição em série de Dyson da quantidade $e^{\mathcal{L}t}$, presente na solução formal (1.20) para um estado arbitrário ρ . Isto é,

$$\begin{aligned} \rho(t) = & e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0) + \sum_{k \in \mathcal{M}} \int_0^t dt_1 e^{\mathcal{L}_0(t-t_1)} \mathcal{L}_k e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho(0) + \\ & + \sum_{k, q \in \mathcal{M}} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 e^{\mathcal{L}_0(t-t_2)} \mathcal{L}_k e^{\mathcal{L}_0(t_2-t_1)} \mathcal{L}_q e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho(0) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cada termo da expressão acima contém um número bem definido de pulos quânticos, o que nos leva à interpretação de que $\rho(t)$ pode ser decomposto em diversas evoluções condicionais, cada qual com um número bem definido de saltos. Isso é explicitado pela

¹Para exemplificar esse conceito, podemos pensar no acoplamento da cavidade óptica com o DQD descrito no capítulo anterior. Imagine que ao invés do elétron excitado pelo fóton ser detectado como uma fotocorrente no reservatório da esquerda (Figura 3.1), ele interaja com um fônon do reservatório e troque a energia recebida do fóton com ele. Assim, não detectaríamos nem o fóton bombeado na cavidade e nem a fotocorrente. Poderíamos então dizer que a troca elétron-fônon é um canal que não estamos monitorando, de sorte que \mathcal{M} representaria apenas as dissipações dadas pelo vazamento do fóton e pela produção de uma fotocorrente.

quantidade de \mathcal{L}_j em cada um dos termos, sendo que a presença de n superoperadores dessa natureza indica n transições do sistema.

Isso nos diz que cada termo da expansão (4.5) pode ser entendido como um estado não normalizado do sistema após uma medição feita em um tempo t , caracterizado pelo número de saltos ocorridos no intervalo $[0, t]$. Assim, tomando como exemplo o caso em que nenhum pulo ocorre, temos que

$$\rho_{no}(t) = \frac{e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)}{P_{no}(t)} \quad (4.6)$$

é o estado físico (i.e., normalizado) do sistema após um tempo t na ausência de pulos, em que

$$P_{no}(t) \equiv P_{no} = \text{Tr}\{e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)\} \quad (4.7)$$

pode ser vista como a probabilidade de ocorrência desse estado.

Com isso, podemos entender que, enquanto sem pulos, o sistema evoluirá com $e^{\mathcal{L}_0 t}$, caso contrário (isto é, na ocorrência de saltos quânticos), devemos aplicar superoperadores \mathcal{L}_j em sua descrição. Assim, podemos definir que a probabilidade de um primeiro pulo ocorrer em um canal j a um tempo t é dada por

$$W(t, j|\rho) = \text{Tr}\{\mathcal{L}_j e^{\mathcal{L}_0 t} \rho\}. \quad (4.8)$$

Mais precisamente, a relação acima nos garante uma distribuição de probabilidades conjuntas no tempo de um sistema que parte de um estado $\rho(0)$ ser detectado em um novo estado $\rho_j(t) \sim \mathcal{L}_j e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)$. Por essa razão, nomeamos $W(t, j|\rho)$ de distribuição de tempo de espera (do inglês *waiting time distribution*; WTD).

Vale notar que a construção das WTDs são subjetivas, vide que elas dependem da escolha dos canais que vamos monitorar. Para ver isso, note que escolhendo-se um conjunto $\tilde{\mathcal{M}} \neq \mathcal{M}$ de canais à serem monitorados, se obtém dinâmicas sem saltos descritas por $\tilde{\mathcal{L}}_0 \neq \mathcal{L}_0$, de modo que a expansão (4.5) toma uma nova forma e, por conseguinte, as WTDs (4.8). É claro que fisicamente devemos esperar uma compatibilidade entre os resultados obtidos por diferentes escolhas de conjuntos \mathcal{M} , porém a relação entre essas opções distintas são, em geral, altamente não triviais, de modo que não iremos abordá-las

aqui.

Dando prosseguimento em nossa análise, podemos ainda nos perguntar qual a distribuição de probabilidades para o caso em que queremos saber apenas o tempo de espera até um pulo ocorrer em algum dos canais que estamos monitorando, não importando qual seja ele. Para tal, podemos apenas somar os dois lados da expressão (4.8) em j , o que nos garante que

$$W(t|\rho) \equiv \sum_{j \in \mathcal{M}} W(t, j|\rho) = \sum_{j \in \mathcal{M}} \text{Tr}\{\mathcal{L}_j e^{\mathcal{L}_0 t} \rho\}, \quad (4.9)$$

mas usando (1.19),

$$\text{Tr}\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\} = \frac{\partial \text{Tr}\{\rho\}}{\partial t} = 0 = \text{Tr}\{\mathcal{L}(\rho)\}, \quad (4.10)$$

uma vez que $\text{Tr}\{\rho\} = 1$ e, por conseguinte, (4.4) nos leva à

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \text{Tr}\{\mathcal{L}_j(\rho)\} = -\text{Tr}\{\mathcal{L}_0(\rho)\}, \quad (4.11)$$

válida para qualquer ρ , logo,

$$W(t|\rho) = -\text{Tr}\{\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t} \rho\} = -\frac{dP_{no}(t)}{dt}, \quad (4.12)$$

com $P_{no}(t)$ sendo a probabilidade de não termos nenhum pulo em um intervalo de tempo $[0, t]$, construída em (4.7). Sendo sua interpretação física clara para nós, podemos integrar os dois extremos da expressão acima para obter

$$\int_0^\infty dt W(t|\rho) = -\int_0^\infty dt \frac{dP_{no}(t)}{dt} = P(0) - P(\infty) = 1 - P(\infty), \quad (4.13)$$

sendo que usamos o fato de que $P(0) = 1$, por construção (em $t = 0$, assumimos que nenhum pulo ocorre). Para muitos casos de interesse vale que $P(\infty) = 0$, uma vez que essa quantidade mensura a probabilidade de nenhum pulo ocorrer em um intervalo de tempo infinito, levando assim à uma dinâmica desinteressante do ponto de vista do nosso formalismo. Isto é,

$$\int_0^\infty dt W(t|\rho) = 1 \quad (4.14)$$

e temos uma WTD normalizada.

Ainda, usando a normalização do operador estatístico, temos que

$$\int_0^\infty dt W(t|\rho) = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_0\left(\int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t}\right)\rho\right\} = \text{Tr}\{\rho\} = 1 \therefore$$

$$\therefore \int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t} = -\mathcal{L}_0^{-1}, \quad (4.15)$$

ou seja, assumir que $P_{no}(\infty) = 0$ (e, conseqüentemente, a normalização de $W(t|\rho)$) equivale a assumir que \mathcal{L}_0 é inversível. Isso nos permite avaliar de maneira assentada certas quantidades, em especial com o uso de *softwares*, como faremos no capítulo seguinte.

A título de exemplo, podemos analisar a probabilidade $W(j|\rho)$ de um primeiro pulo ocorrer em um canal j , independente do tempo necessário para tal. Para isso, baste que integremos (4.8) no intervalo $t \in [0, \infty]$ e apliquemos (4.15), i.e.,

$$W(j|\rho) = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_j\left(\int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t}\right)\rho\right\} = -\text{Tr}\{\mathcal{L}_j \mathcal{L}_0^{-1} \rho\}. \quad (4.16)$$

Essa quantidade se faz útil especialmente quando queremos comparar a taxa de ocorrência de saltos quânticos de um certo canal para com outros, revelando assim o escopo geral das interações sistema-meio (e.g., como os fatores de acoplamento influenciam nas distribuições, se há alguma preferência de troca, etc).

Também, vale ressaltar o tempo médio $\langle t \rangle$ para que algum pulo ocorra no sistema. De um ponto de vista teórico, essa entidade nos diz quanto tempo em média o sistema transita de um estado de equilíbrio a outro, o que nos permite, entre outras coisas, a fazer uma análise termodinâmica de sistemas quânticos, visto que com ela podemos especificar quando um processo pode ser entendido como quase estático². Como não estamos interessados na natureza do salto quântico em questão, essa quantidade independe do canal escolhido, de sorte que podemos alcançá-la ao integrarmos o parâmetro t com um peso $W(t|\rho)$ (ver eq. 4.12) para todos os possíveis tempos, ou seja,

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dt W(t|\rho) t = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_0\left(\int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t} t\right)\rho\right\} = -\text{Tr}\{\mathcal{L}_0^{-1} \rho\}, \quad (4.17)$$

²Lembre-se que a Termodinâmica de Equilíbrio é válida apenas para sistemas estáveis, cujas equações de estado mapeiam estados de equilíbrio em estados de equilíbrio intermediados por processos quase estáticos [20].

em que usamos a identidade $\int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t} t^n = (-1)^{n+1} n! \mathcal{L}_0^{-(n+1)}$ no último passo.

Tanto as probabilidades $W(j|\rho)$ de algum pulso ocorrer em nosso sistema em algum momento, quanto o tempo médio $\langle t \rangle$ de detectarmos alguma modificação em nossos estados, serão quantidades bastante exploradas quando formos analisar um fotodetector sob a óptica da estatística de tempo de espera construída nesse capítulo. De fato, elas serão as mais importantes intermediárias das consequências físicas de nosso modelo, como veremos no próximo capítulo.

Por fim, vale comentar que a construção acima pode ser facilmente generalizada para o caso de estarmos interessados em pulsos subsequentes em nosso sistema. Para tal, devemos levar em conta os termos de ordem superior na expansão (4.5). Isso nos permite definir

$$W(t_1, j_1, \dots, t_N, j_N | \rho) = \text{Tr}\{\mathcal{L}_{j_N} e^{\mathcal{L}_0 t_N} \dots \mathcal{L}_{j_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho\} \quad (4.18)$$

como sendo a distribuição de tempo de espera para N pulsos consecutivos nos canais $\{j_i\}$ ($i = 1, \dots, N$), com $t_N > t_{N-1} > \dots > t_1$. Repare que os canais não precisam ser necessariamente distintos: podemos estar interessados em saltos subsequentes em um mesmo canal. Em particular, para o caso em que $N = 2$, i.e., quando temos dois pulsos subsequentes com o primeiro ocorrendo no instante t_1 e o segundo no instante t_2 , segue que

$$W(j_1, t_1, t_2, j_2 | \rho) = \text{Tr}\{\mathcal{L}_{j_2} e^{\mathcal{L}_0 t_2} \mathcal{L}_{j_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho\} = \text{Tr}\{\mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_0^{-1} \rho\}, \quad (4.19)$$

em que usamos (4.15) no último passo. Com essa última ferramenta em mãos, estamos aptos à análise da estatística de tempo de espera para uma cavidade óptica acoplada com um ponto quântico duplo.

Capítulo 5

Estatística de Tempo de Espera para uma Cavidade Óptica Acoplada com um Ponto Quântico Duplo

Tendo em mãos todo o arcabouço teórico necessário, podemos finalmente nos voltar à estatística de tempo de espera para uma cavidade óptica acoplada com um ponto quântico duplo. Para tal, utilizamos o *software* Wolfram Mathematica, bem como a extensão Melt!¹, cujas ideias centrais para a extração dos resultados aqui expostos podem ser encontradas no Apêndice B.

Não obstante, iremos focar apenas nos resultados analíticos que conseguimos extrair em nossa análise. Eles são obtidos ao fixarmos os modos bosônicos oriundos do bombeio, visando restringir os operadores a e a^\dagger à espaços de Hilbert de dimensões tratáveis, vide que esse é o cerne do empecilho algébrico do nosso modelo. Assim, uma aproximação útil é iniciarmos com uma cavidade que contenha um certo número de fótons e desligarmos o feixe que a alimenta com essas partículas. Em outras palavras, vamos fixar $\xi = 0$ em (3.3) e propor um estado inicial $\rho_0^{(n)} = |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$, com $|\psi_n\rangle \equiv |0\rangle \otimes |n\rangle$, em que $|0\rangle$ é o estado de vácuo fermiônico e $|n\rangle$ é o estado bosônico de dimensão n referente a n fótons. No que segue, iremos voltar nosso interesse para o caso de $n = 1$ e $n = 2$, i.e., quando a cavidade inicialmente armazena um único fóton e quando ela inicia sua dinâmica com dois deles, respectivamente. Além disso, começaremos nossa análise já no regime de um

¹<https://melt1.notion.site/>

fotodetector ideal [5], em que $\Gamma_{g0} = \Gamma_{oe} \equiv \Gamma$ e $\Delta_d = \Delta_r \equiv 0$, fazendo com que a hamiltoniana (3.4) se reduza a

$$\tilde{H} = g \left(a^\dagger \sigma_+^\dagger + a \sigma_+ \right), \quad (5.1)$$

o que garante um enfoque exclusivo na interação entre a cavidade óptica e o DQD. Ainda nesse regime, a evolução dinâmica dos estados será dada por (3.10) na forma

$$\dot{\rho} = -i \left[\tilde{H}, \rho \right] + \Gamma \mathcal{D}[s_g^\dagger] \rho + \Gamma \mathcal{D}[s_e] \rho + \kappa \mathcal{D}[a] \rho. \quad (5.2)$$

Assim, temos uma dinâmica que leva em conta que a taxa de transição entre elétrons dos reservatórios para o estado fundamental do poço e de elétrons no estado excitado para os metais é idêntica, o que garante uma proporção entre as partículas de entrada e de saída.

5.1 Cenário de um Único Fóton

Começamos pelo caso mais simples, em que $n = 1$. Nele, temos que o espaço de Hilbert associado aos bósons é bidimensional, uma vez que podemos ter um ou nenhum fóton em nosso sistema². Assim, o estado inicial do nosso sistema será $\rho_0^{(1)} = |\psi_1\rangle \langle \psi_1|$, fazendo com que uma possível solução formal de (5.2) seja dada por

$$\rho(t) = \exp\{\mathcal{L}_1 t\} \rho_0^{(1)}, \quad (5.3)$$

em que \mathcal{L}_1 é dado por

$$\mathcal{L}_1 \rho = -i \left[\tilde{H}, \rho \right] + \Gamma \mathcal{D}[s_g^\dagger] \rho + \Gamma \mathcal{D}[s_e] \rho + \kappa \mathcal{D}[a] \rho. \quad (5.4)$$

Estamos interessados na probabilidade p_c do fóton contido na cavidade vazar do sistema ou, equivalentemente, na probabilidade p_e de ele ser absorvido por um elétron e, portanto, ser detectado por nós como uma fotocorrente. Antes de averiguá-las, entretanto, é importante notar que a equivalência entre essas duas quantidades é válida apenas no

²Os estados $\{|\tilde{0}\rangle, |1\rangle\}$ formam uma base para o espaço, em que o til (\sim) no zero foi colocado para diferenciarmos do estado de vácuo fermiônico $|0\rangle$.

regime de um fotodetector ideal, uma vez que desprezamos outras formas de troca energética entre os constituintes do sistema, como, por exemplo, um elétron trocar a energia que obteve de um fóton com um fônon do reservatório, de sorte que não houve o vazamento de um fóton para o ambiente, e muito menos o surgimento de uma fotocorrente³. Tendo esclarecido isso, vamos seguir nosso raciocínio definindo o canal

$$\mathcal{L}_e \rho \equiv \Gamma s_e \rho s_e^\dagger, \quad (5.5)$$

responsável pelos saltos do DQD do estado excitado para um sem partículas (i.e., $|e\rangle \rightarrow |0\rangle$), caracterizando assim uma fotocorrente, e o canal

$$\mathcal{L}_\gamma \rho \equiv \kappa a \rho a^\dagger, \quad (5.6)$$

este remetendo à transição da cavidade de um estado com um fóton para outro que não o tenha ($|1\rangle \rightarrow |\tilde{0}\rangle$) através de uma troca com o meio, o que caracteriza um vazamento de partículas do sistema para o ambiente. Assim, podemos escrever o operador que rege a dinâmica sem pulos do sistema como sendo

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 - \kappa \mathcal{L}_\gamma - \Gamma \mathcal{L}_e = \mathcal{L}_1 - \kappa a \rho a^\dagger - \Gamma s_e \rho s_e^\dagger. \quad (5.7)$$

Destarte, as probabilidades p_e e p_γ para um pulo ocorrer no canal e e γ , respectivamente, para algum instante de tempo são dadas por (vide eq. 4.16)

$$p_e \equiv W(e|\rho) = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_e \mathcal{L}_0^{-1} \rho_0^{(1)}\right\} \quad (5.8)$$

e

$$p_\gamma \equiv W(\gamma|\rho) = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_\gamma \mathcal{L}_0^{-1} \rho_0^{(1)}\right\}. \quad (5.9)$$

Da forma que foram concebidas acima, podemos calcular explicitamente p_e e p_γ em termos dos parâmetros do nosso modelo, por intermédio do Wolfram Mathematica (Apên-

³Essa interação elétron-fônon pode ser acrescida facilmente na nossa descrição, bastando que carregue-mos $\gamma_\pm \neq 0$ em (1.46). De fato, isso foi feito por nós e está presente nos *notebooks* mencionados, mas excluídos aqui por simplicidade e clareza.

dice B). Feito isso, obtemos que

$$p_e = \frac{4g^2\Gamma^2}{(\Gamma + \kappa)^2(4g^2 + \Gamma\kappa)}, \quad (5.10)$$

bem como

$$p_\gamma = \frac{\kappa(\Gamma(\Gamma + \kappa)^2 + 4g^2(2\Gamma + \kappa))}{(\Gamma + \kappa)^2(4g^2 + \Gamma\kappa)}, \quad (5.11)$$

donde vemos imediatamente que $p_e + p_\gamma = 1$, como o esperado.

No intuito de analisarmos as consequências físicas dos resultados acima, vamos definir as quantidades

$$\alpha \equiv \frac{\Gamma}{\kappa} \quad \text{e} \quad C \equiv \frac{4g^2}{\Gamma\kappa}. \quad (5.12)$$

A primeira delas está associada com a competição entre a interação fermiônica do DQD (elétrons nos poços com os terminais, contida na constante Γ) e a interação bosônica do banho com a cavidade (dada por κ). Já a segunda, é a dita cooperatividade entre o DQD e a cavidade, vide que expressa a disputa entre a interação deles (contido em g) contra as duas interações citadas anteriormente (devidas a Γ e a κ)⁴. Com elas, podemos reescrever (5.10) como sendo⁵

$$p_e = \frac{C\alpha^2}{(\alpha + 1)^2(C + 1)}. \quad (5.13)$$

Repare que $C \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow 0$ implicam imediatamente que $p_e \rightarrow 0$ e, portanto, $p_\gamma \rightarrow 1$. Em outras palavras, quando desligamos a interação entre o ponto quântico duplo e a cavidade ou escolhemos um meio cuja interação com os fótons seja muito mais forte que a interação reservatório-elétron do DQD, o vazamento do fóton para o meio tende sempre a ocorrer. Em contrapartida, ao fazermos $\alpha \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_e = \frac{C}{(C + 1)} \quad (5.14)$$

ou seja, se escolhermos nossas interações de tal modo que exista a predominância fermiônica sob a bosônica ($\Gamma \gg \kappa$), podemos otimizar a taxa de ocorrência de fotocorrentes ao escolhermos valores convenientes de C . Da mesma forma, no limite em que $C \rightarrow \infty$,

⁴Veja a Figura 3.1.

⁵A partir daqui, daremos enfoque à p_e , uma vez que $p_\gamma = 1 - p_e$.

segue que

$$\lim_{C \rightarrow \infty} p_e = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2}. \quad (5.15)$$

Note que poderíamos simplesmente dizer que $C, \alpha \gg 1$ faria com que $p_e \approx 1$ e $p_\gamma \approx 0$, i.e., C e α (ou, equivalentemente, $\Gamma, g^2 \gg \kappa$) garantem uma probabilidade de detecção de fotocorrente máxima, sendo a escolha ideal para um detector de fótons construído com base em acoplamentos dessa natureza. Não obstante, escolhemos analisar esses dois limites separados para que a comparação com o caso em que $n = 2$ se faça mais clara.

Podemos ainda refinar nossa análise ao avaliarmos o tempo médio $\langle t_1 \rangle$ para que algum pulso (e ou γ) ocorra em nosso modelo. Para tal, basta usarmos (4.17) com $\rho = \rho_0^{(1)}$ e \mathcal{L}_0 dado por (5.7), i.e.,

$$\langle t_1 \rangle = -\text{Tr}\left\{\mathcal{L}_0^{-1}\rho_0^{(1)}\right\} = \frac{\Gamma(\Gamma + \kappa)^2 + 4g^2(3\Gamma + \kappa)}{(\Gamma + \kappa)^2(4g^2 + \Gamma\kappa)} \quad (5.16)$$

ou, usando as definições de α e C ,

$$\kappa\langle t_1 \rangle = \frac{(\alpha + 1)^2 + C(3\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^2(C + 1)}. \quad (5.17)$$

A Figura 5.1 esboça o comportamento dessa função em termos da cooperatividade para três valores distintos de α . Note para $0 < \alpha < 1$ ($\kappa > \Gamma \neq 0$) temos que o tempo médio de algo ocorrer no sistema aumenta com a cooperatividade, ou seja, o sistema tende a demorar mais para mudar seu estado, até um limite máximo dado por $\kappa\langle t_1 \rangle = (3\alpha + 1)/(\alpha + 1)^2$. Para $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$, temos que o tempo médio do sistema permanece constante, igual a um. Isto é, quando as interações fermiônicas e bosônicas tem a mesma intensidade (ou não existe disputa), o sistema tende a dissipar, em média, em um intervalo fixo. Por fim, se $\alpha > 1$, conforme aumentamos a cooperatividade, o sistema dissipa cada vez mais rápido.

5.2 Cenário de Dois Fótons

Consideremos agora o caso em que $n = 2$, i.e., iniciamos a dinâmica do nosso sistema com dois fótons dentro da cavidade, de sorte que o nosso estado inicial é $\rho_0^{(2)}$. Os ca-

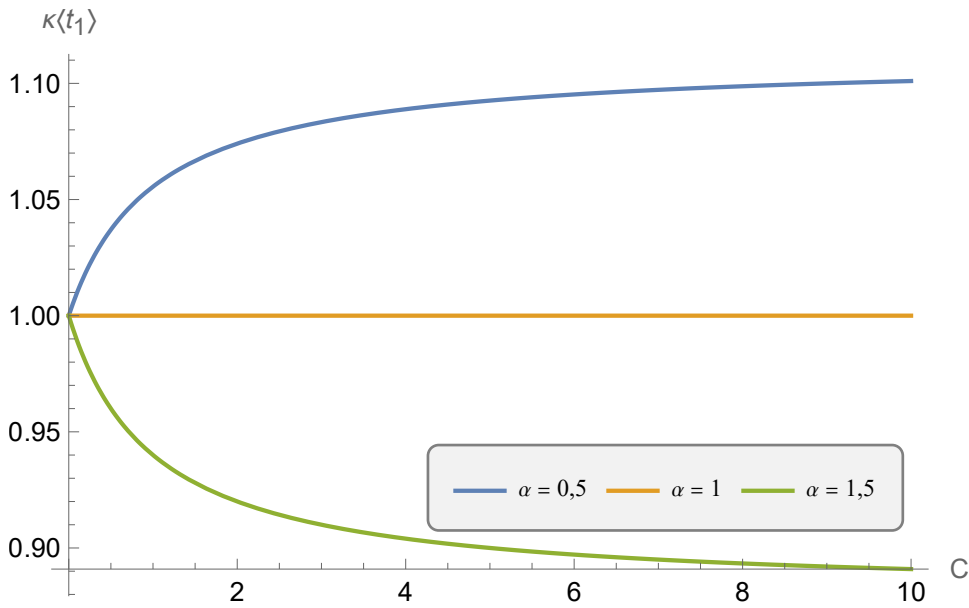


Figura 5.1: Tempo médio (vezes κ) para o cenário de um único fóton em função de $C \in [0, 10]$ para diferentes valores de α . Em azul, $\alpha = 0,5 < 1$. Em laranja, $\alpha = 1$. Em verde, $\alpha = 1,5 > 1$. Note a diferença do comportamento de $\kappa\langle t_1 \rangle$ para os diferentes regimes de α . Quando a interação fermiônica (dado por Γ) é predominante em relação a bosônica (dada por κ), i.e., quando $\alpha > 1$, segue que o tempo médio é decrescente com a cooperatividade, o que nos diz que algo acontecerá no sistema mais rapidamente. Quando há uma predominância bosônica ($\alpha < 1$), o sistema tende a ficar mais estável, dissipando (em média) cada vez mais devagar conforme a cooperatividade aumenta, até um limite máximo (no gráfico, $\kappa\langle t_1 \rangle \rightarrow 1,11$ conforme C aumenta). Quando as interações bosônicas estão tão intensas quanto as fermiônicas ($\alpha = 1$), segue que o tempo médio é constante, de sorte que sistemas dessa natureza dissipam, em média, em um mesmo intervalo de tempo.

nais que estamos monitorando ainda são os mesmos (a saber, e e γ), o que faz com que possamos utilizar expressões análogas ao caso anterior, com

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_2 - \kappa a \rho a^\dagger - \Gamma s_e \rho s_e^\dagger, \quad (5.18)$$

em que \mathcal{L}_2 difere de \mathcal{L}_1 (bem como os demais operadores com a mesma letra que em 4.4) por a atuar em um espaço de Hilbert tridimensional, ao contrário de antes, em que atuava em um espaço de duas dimensões⁶.

Com isso, podemos averiguar as probabilidades de interesse do nosso sistema por intermédio da estatística de tempo de espera. Contudo, diferente de antes, temos quatro probabilidades distintas passíveis de serem calculadas, a saber (i) a probabilidade p_{ee} de detectarmos dois elétrons em sequência, (ii) a probabilidade $p_{e\gamma}$ de detectarmos primeiro um elétron e depois um fóton, (iii) a probabilidade $p_{\gamma e}$ de detectarmos primeiro um fóton e depois um elétron e, por fim, (iv) a probabilidade $p_{\gamma\gamma}$ de detectarmos dois fótons em sequência. Assim, visto que estamos sempre interessados na ocorrência de dois pulos consecutivos em nosso sistema, utilizaremos a distribuição de tempo de espera na forma (4.19). Isto é,

$$p_{ij} \equiv W(j, i|\rho) = \text{Tr} \left\{ \mathcal{L}_j \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_i \mathcal{L}_0^{-1} \rho_0^{(2)} \right\}, \quad (5.19)$$

em que $i, j = e, \gamma$. Explicitamente, já em termos das constantes α e C (eq. 5.12), segue que

$$p_{ee} = \frac{C^2 \alpha^5}{(1+C)(1+\alpha)^2(1+\alpha+C\alpha)(6+5\alpha+\alpha^2)} \quad (5.20)$$

$$p_{e\gamma} = \frac{C\alpha^3(C+2C\alpha+(1+\alpha^2))}{(1+C)(1+\alpha)^2(3+\alpha)(1+\alpha+C\alpha)} \quad (5.21)$$

$$p_{\gamma e} = \frac{C\alpha^2(12+\alpha(3+\alpha)(7+\alpha)+C\alpha(9+5\alpha))}{(1+C)(1+\alpha)^2(3+\alpha)(1+\alpha+C\alpha)} \quad (5.22)$$

e

$$p_{\gamma\gamma} = \frac{(1+\alpha)^3(3+\alpha)+C(1+\alpha)(3+\alpha)(1+3\alpha)+C^2\alpha(3+7\alpha)}{(1+C)(1+\alpha)^2(3+\alpha)(1+\alpha+C\alpha)} \quad (5.23)$$

são as probabilidades de duas detecções seguidas independente do tempo. Novamente,

⁶A escolha de modificar a notação apenas nos superoperadores \mathcal{L}_i ($i = 1, 2$) foi feita com o intuito de não sobrecarregar o leitor com excesso de notações, mas conter um lembrete que os dois cenários pedem por quantidades distintas (apesar da mesma forma algébrica).

repare que $p_{ee} + p_{e\gamma} + p_{\gamma e} + p_{\gamma\gamma} = 1$, como deve ser.

Usando a aditividade de probabilidades independentes, podemos definir

$$p_{e1} \equiv p_{ee} + p_{e\gamma} = \frac{C\alpha^3}{(2 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + \alpha + C\alpha)} \quad (5.24)$$

e

$$p_{e2} \equiv p_{ee} + p_{\gamma e} = \frac{C\alpha^2 (12 + 3(7 + 3C)\alpha + 5(2 + C)\alpha^2 + (1 + C)\alpha^3)}{(1 + C)(1 + \alpha)^2(2 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + \alpha + C\alpha)} \quad (5.25)$$

como sendo, respectivamente, a probabilidade de detectarmos uma fotocorrente (i.e., ter um salto no canal e) na primeira medição e a probabilidade de detectarmos esse mesmo fenômeno, mas na segunda medição. De modo completamente análogo, podemos definir também as probabilidades de obtermos um vazamento de fótons (ou seja, de termos um pulso no canal γ) na primeira e na segunda medição, sendo elas

$$p_{\gamma 1} \equiv p_{\gamma\gamma} + p_{e\gamma} = \frac{6 + (11 + 6C)\alpha + (6 + 5C)\alpha^2 + \alpha^3}{(2 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + \alpha + C\alpha)}. \quad (5.26)$$

e

$$\begin{aligned} p_{\gamma 2} &\equiv p_{\gamma\gamma} + p_{\gamma e} = \\ &= \frac{1}{(1 + C)(1 + \alpha)^2(2 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + \alpha + C\alpha)} \left\{ (1 + \alpha)^3(6 + 5\alpha + \alpha^2) + \right. \\ &\left. + C^2\alpha(6 + 17\alpha + 8\alpha^2 + 2\alpha^3) + C(6 + 29\alpha + 39\alpha^2 + 20\alpha^3 + 5\alpha^4 + \alpha^5) \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Comparando as definições acima com a expressão (5.13) e a condição $p_{\gamma} = p_e - 1$, é possível verificar as relações (Figura 5.2)

$$p_{e2} \geq p_e \geq p_{e1} \quad \text{e} \quad p_{\gamma 1} \geq p_{\gamma} \geq p_{\gamma 2} \quad \forall \alpha, C. \quad (5.28)$$

Essas relações nos dizem que a probabilidade de detectarmos uma fotocorrente (vazamento de fótons) na primeira medição no caso em que começamos com dois fótons na cavidade é menor (maior) do que no caso em que começamos com apenas um, enquanto o contrário ocorre para um segunda medição. Esse resultado independe dos valores das constantes de acoplamento do nosso sistema. Assim, estando em posse da distribuição de

probabilidades do caso com um único fóton, podemos saber se a cavidade iniciou com um ou mais fótons por intermédio de uma única medida⁷. Fisicamente, é como se os fótons na cavidade interagissem entre si, de modo a aumentar a chance de escape na primeira medição, quando estão acumulados na cavidade, mas diminuindo na segunda. Esse fenômeno nos induz a inferir que quanto mais fótons na cavidade (i.e., quanto maior o valor de n), menor será a probabilidade de obtermos uma fotocorrente na primeira medição, uma vez que teríamos um comportamento análogo ao caso de *photon bunching* [21]. Isso nos desperta a suspeita de que um modelo ideal para sempre obtermos uma fotocorrente é aquele que concebe um bombeio fraco (i.e., $\xi \ll 1$), vide que esperamos que nesse caso ele corresponda ao nosso modelo. Isso concorda com os resultados obtidos previamente na literatura [4, 5].

Seguindo adiante em nossa análise, temos que no limite assintótico em que $\alpha \rightarrow \infty$, ou seja, quando as interações fermiônicas são predominantes às bosônicas,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{ee} = \frac{C^2}{(1+C)^2}, \quad (5.29)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{e\gamma} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{\gamma e} = \frac{C}{(1+C)^2} \quad (5.30)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{\gamma\gamma} = \frac{1}{(1+C)^2}. \quad (5.31)$$

Comparando esses resultados com o caso de $n = 1$ (eq. 5.14), vemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_e = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{e1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{e2} \quad (5.32)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_\gamma = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{\gamma 1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} p_{\gamma 2}. \quad (5.33)$$

Isso quer dizer que no regime de interação forte entre os férmions, o cenário de dois fótons se comporta como o acoplamento de dois cenários de um único fóton, i.e., a quantidade

⁷Não no sentido estrito. Em Mecânica Quântica, devemos sempre ter muitas réplicas do nosso sistema e repetirmos a medição feita para cada uma das réplicas, no intuito de extrairmos as distribuições de probabilidades. Assim, dizer que precisamos de uma única medida é equivalente a dizer que podemos replicar apenas um sistema e construir uma única distribuição de probabilidades.

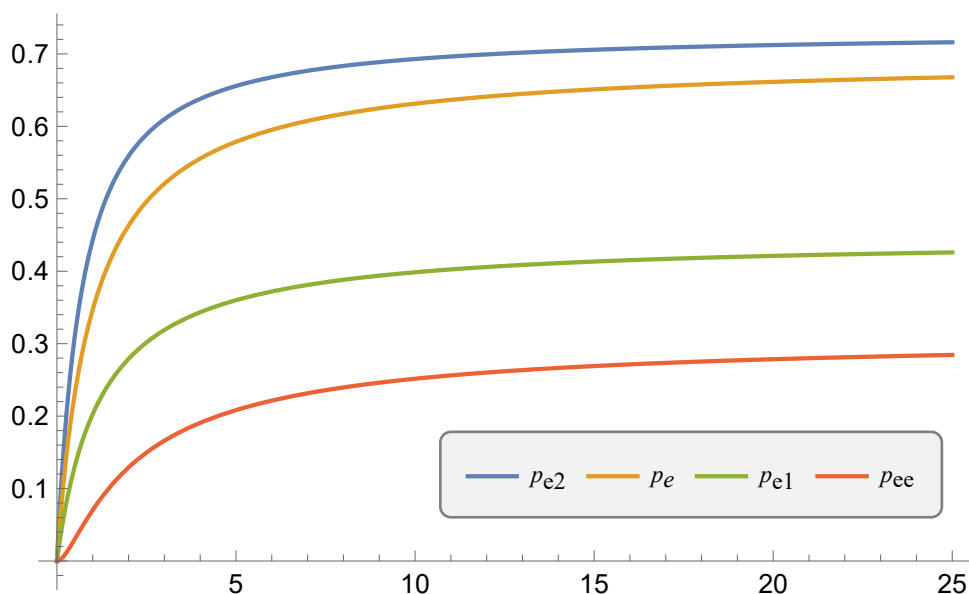


Figura 5.2: Probabilidades de detecção de fotocorrente em função de $C \in [0, 25]$, com $\alpha = 5$. No cenário de dois fótons: em azul, a probabilidade p_{e2} da segunda detecção ser uma fotocorrente; em verde, a probabilidade p_{e1} da primeira detecção ser uma fotocorrente; em vermelho, a probabilidade das duas detecções serem de uma fotocorrente. No cenário de um fóton: em laranja, a probabilidade da única detecção ser uma fotocorrente. Note que existe uma hierarquia na forma $p_{ee} \leq p_{e1} \leq p_e \leq p_{e2}$ que sempre é satisfeita. A igualdade acontece para valores pequenos de C . Esse resultado independe do valor de α e nos garante uma forma de identificar com qual cenário estamos lidando com base na distribuição de probabilidades da nossa n -ésima medição. O comportamento das distribuições de probabilidade para o caso do vazamento de fótons é antagônico ao mostrado acima, expressando uma física análoga.

de fótons dentro da cavidade deixa de apresentar os fenômenos discutidos acima. Em outras palavras, os resultados da primeira e da segunda medição se tornam completamente independentes.

O mesmo não acontece no regime assintótico para a cooperatividade C , vide que

$$\lim_{C \rightarrow \infty} p_{ee} = \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha)^2(6 + 5\alpha + \alpha^2)}, \quad (5.34)$$

$$\lim_{C \rightarrow \infty} p_{e\gamma} = \frac{\alpha^2(1 + 2\alpha)}{(1 + \alpha)^2(6 + 5\alpha + \alpha^2)}, \quad (5.35)$$

$$\lim_{C \rightarrow \infty} p_{\gamma e} = \frac{\alpha^2(9 + 5\alpha)}{(1 + \alpha)^2(6 + 5\alpha + \alpha^2)} \quad (5.36)$$

e

$$\lim_{C \rightarrow \infty} p_{\gamma\gamma} = \frac{3 + 7\alpha}{(1 + \alpha)^2(3 + \alpha)}. \quad (5.37)$$

Nesse caso, temos uma dependência não trivial em α em todas as expressões, o que não nos permite tirar nenhum resultado geral. Com isso, vemos que a constante α é aquela com um papel fundamental no comparativo entre esses diferentes cenários (i.e., diferentes valores de n).

Ainda, vale ressaltar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} p_{ij} = \lim_{C \rightarrow 0} p_{ij} = \delta_{i\gamma} \delta_{\gamma j}, \quad (5.38)$$

ou seja, os fótons sempre vazam para o meio quando a interação entre o DQD e a cavidade óptica é fraca, replicando o resultado para $n = 1$. Intuitivamente, esperamos que isso ocorra para qualquer valor de n , uma vez que essas condições impõem uma predominância entre a interação cavidade-ambiente sob as interações entre os elétrons e os fótons do sistema, fazendo com que qualquer probabilidade de produção de fotocorrente seja atenuada.

Capítulo 6

Conclusão

Essa dissertação teve como intuito analisar o acoplamento de uma cavidade óptica acoplada com um ponto quântico duplo utilizando o formalismo da estatística de tempo de espera. Para isso, usamos o capítulo inicial para introduzir o leitor aos conceitos fundamentais da teoria de sistemas quânticos abertos e, nos capítulos seguintes, derivamos equações mestras para o caso de uma rede férmions geral, introduzimos e analisamos o sistema e o formalismo citado e, por fim, usamos o Wolfram Mathematica para extrair as probabilidades de interesse para a descrição do sistema em foco. Assim, demos um passo natural na análise estatística feita em [5], mostrando que existe uma hierarquia nas distribuições de probabilidades para o vazamento de fótons dependendo de qual seja o número do pulso em questão (i.e., se é o primeiro vazamento, o segundo, etc.). Além disso, extraímos soluções analíticas para o cenário em que começamos com uma cavidade com um ou com dois fótons, o que nos permitiu avaliar sobre quais condições a probabilidade de detecção de uma fotocorrente é máxima, o que está intimamente conectado com a otimização da eficiência de um fotodetector baseado em um DQDs [4]. Ademais, extraímos o tempo médio de espera para a ocorrência de um pulso em função das constantes de interação do modelo, o que permite um controle experimental maior desse tipo de sistema.

Todo o desenvolvimento aqui feito pode ser replicado levando em conta trocas elétron-fônon, o que acresce no número de canais a serem monitorados e adiciona um termo de dissipação na equação dinâmica (5.2). De fato, isso foi feito pelos autores e está em processo de análise. Ademais, o uso desse formalismo para o estudo do cenário de $N > 2$ fótons também é de interesse futuro, principalmente para corroborar com a ideia

de *photon bunching* e a generalização da hierarquia discutida. Finalmente, este trabalho dá um pontapé para o estudo da estatística de tempo de espera para esse modelo com bombeio não nulo, o que permite uma descrição mais consistente e preditiva da cavidade óptica acoplada com o DQD.

Apêndice A

Detalhando os Cálculos Feitos para a Derivação da Equação Mestra

Nosso interesse aqui é explicitar um pouco mais as contas que levam à equação (2.8) em (2.19).

A partir de (2.8), temos que

$$\dot{\rho}_S(t) = - \int_0^\infty d\xi \text{Tr}_B \{ [H_I(t), [H_I(t - \xi) \rho_S(t) \otimes \rho_B]] \}. \quad (\text{A.1})$$

Substituindo $H_I(t)$ por

$$H_I(t) = \sum_{\omega} (e^{i\omega t} A^\dagger(\omega) B(t) + e^{-i\omega t} B^\dagger(t) A(\omega)), \quad (\text{A.2})$$

com

$$B(t) = e^{iH_B t} B e^{-iH_B t}, \quad (\text{A.3})$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_S(t) &= - \int_0^\infty d\xi \text{Tr}_B \left\{ \left[\sum_\omega (e^{i\omega t} A^\dagger(\omega) B(t) + e^{-i\omega t} B^\dagger(t) A(\omega)), \right. \right. \\
 &\quad \left. \left[\sum_{\omega'} (e^{i\omega'(t-\xi)} A^\dagger(\omega') B(t-\xi) + e^{-i\omega'(t-\xi)} B^\dagger(t-\xi) A(\omega')), \rho_S(t) \otimes \rho_B \right] \right\} = \\
 &= - \sum_{\omega, \omega'} \int_0^\infty d\xi \text{Tr}_B \left\{ \left[(e^{i\omega t} A^\dagger(\omega) B(t) + e^{-i\omega t} B^\dagger(t) A(\omega)), \right. \right. \\
 &\quad e^{i\omega'(t-\xi)} A^\dagger(\omega') \rho_S(t) \otimes B(t-\xi) \rho_B - e^{i\omega'(t-\xi)} \rho_S(t) A^\dagger(\omega') \otimes \rho_B B(t-\xi) + \\
 &\quad \left. \left. + e^{-i\omega'(t-\xi)} A(\omega') \rho_S(t) \otimes B^\dagger(t-\xi) \rho_B - e^{-i\omega'(t-\xi)} \rho_S(t) A(\omega') \otimes \rho_B B^\dagger(t-\xi) \right] \right\}, \\
 &\hspace{20em} \text{(A.4)}
 \end{aligned}$$

em que apenas abrimos explicitamente $H_I(t)$ e $H_I(t-\xi)$ usando (A.2) e avaliamos explicitamente o comutador $[H_I(t-\xi), \rho_S(t) \otimes \rho_B]$. Fazendo então o cálculo direto do

comutador restante e agrupando as exponenciais, segue que

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_S(t) = & - \sum_{\omega, \omega'} \int_0^\infty d\xi \text{Tr}_B \left\{ e^{i(\omega'+\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A^\dagger(\omega) A^\dagger(\omega') \rho_S(t) \otimes B(t) B(t-\xi) \rho_B + \right. \\
 & - e^{i(\omega'+\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A^\dagger(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega) \otimes B(t-\xi) \rho_B B(t) + \\
 & - e^{i(\omega'+\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A^\dagger(\omega') \otimes B(t) \rho_B B(t-\xi) + \\
 & + e^{i(\omega'+\omega)t} e^{-i\xi\omega'} \rho_S(t) A^\dagger(\omega') A^\dagger(\omega) \otimes \rho_B B(t-\xi) B(t) + \\
 & + e^{i(\omega-\omega')t} e^{i\xi\omega'} A^\dagger(\omega) A(\omega') \rho_S(t) \otimes B(t) B^\dagger(t-\xi) \rho_B + \\
 & - e^{i(\omega-\omega')t} e^{i\xi\omega'} A(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega) \otimes B^\dagger(t-\xi) \rho_B B(t) + \\
 & - e^{i(\omega-\omega')t} e^{i\xi\omega'} A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A(\omega') \otimes B(t) \rho_B B^\dagger(t-\xi) + \\
 & + e^{i(\omega-\omega')t} e^{i\xi\omega'} \rho_S(t) A(\omega') A^\dagger(\omega) \otimes \rho_B B^\dagger(t-\xi) B(t) + \\
 & + e^{i(\omega'-\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A(\omega) A^\dagger(\omega') \rho_S(t) \otimes B^\dagger(t) B(t-\xi) \rho_B + \\
 & - e^{i(\omega'-\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A^\dagger(\omega') \rho_S(t) A(\omega) \otimes B(t-\xi) \rho_B B^\dagger(t) + \\
 & - e^{i(\omega'-\omega)t} e^{-i\xi\omega'} A(\omega) \rho_S(t) A^\dagger(\omega') \otimes B^\dagger(t) \rho_B B(t-\xi) + \\
 & + e^{i(\omega'-\omega)t} e^{-i\xi\omega'} \rho_S(t) A^\dagger(\omega') A(\omega) \otimes \rho_B B(t-\xi) B^\dagger(t) + \\
 & + e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i\xi\omega'} A(\omega) A(\omega') \rho_S(t) \otimes B^\dagger(t) B^\dagger(t-\xi) \rho_B + \\
 & - e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i\xi\omega'} A(\omega') \rho_S(t) A(\omega) \otimes B^\dagger(t-\xi) \rho_B B^\dagger(t) + \\
 & - e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i\xi\omega'} A(\omega) \rho_S(t) A(\omega') \otimes B^\dagger(t) \rho_B B^\dagger(t-\xi) + \\
 & \left. + e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i\xi\omega'} \rho_S(t) A(\omega') A(\omega) \otimes \rho_B B^\dagger(t-\xi) B^\dagger(t) \right\}. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Definindo agora as funções de correlação

$$\gamma_1(\omega) \equiv \int_0^\infty d\xi e^{-\xi\omega'} \text{Tr}_B \{ B(t-\xi) \rho_B B(t) \}, \tag{A.6}$$

$$\gamma_2(\omega) \equiv \int_0^\infty d\xi e^{-\xi\omega'} \text{Tr}_B \{ B(t-\xi) B(t) \rho_B \}, \tag{A.7}$$

$$\gamma_3(\omega) \equiv \int_0^\infty d\xi e^{\xi\omega'} \text{Tr}_B \{ B^\dagger(t-\xi) \rho_B B(t) \}, \tag{A.8}$$

e

$$\gamma_4(\omega) \equiv \int_0^\infty d\xi e^{\xi\omega'} \text{Tr}_B \{ \rho_B B^\dagger(t-\xi) B(t) \} \tag{A.9}$$

que, como mostrado no texto principal, independem do tempo, segue que

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_S(t) = & - \sum_{\omega, \omega'} \left\{ \gamma_1 e^{i(\omega' + \omega)t} (A^\dagger(\omega) A^\dagger(\omega') \rho_S(t) - A^\dagger(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega)) + \right. \\
 & + \gamma_2 e^{i(\omega' + \omega)t} (\rho_S(t) A^\dagger(\omega') A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A^\dagger(\omega')) + \\
 & + \gamma_3 e^{i(\omega - \omega')t} (A^\dagger(\omega) A(\omega') \rho_S(t) - A(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega)) + \\
 & + \gamma_4 e^{i(\omega - \omega')t} (\rho_S(t) A(\omega') A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A(\omega')) + \\
 & + \gamma_4^* e^{i(\omega' - \omega)t} (A(\omega) A^\dagger(\omega') \rho_S(t) - A^\dagger(\omega') \rho_S(t) A(\omega)) + \\
 & + \gamma_3^* e^{i(\omega' - \omega)t} (\rho_S(t) A^\dagger(\omega') A(\omega) - A(\omega) \rho_S(t) A^\dagger(\omega')) + \\
 & + \gamma_2^* e^{-i(\omega + \omega')t} (A(\omega) A(\omega') \rho_S(t) - A(\omega') \rho_S(t) A(\omega)) + \\
 & \left. + \gamma_1^* e^{-i(\omega + \omega')t} (\rho_S(t) A(\omega') A(\omega) - A(\omega) \rho_S(t) A(\omega')) \right\}, \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}(S) = & - \sum_{\omega, \omega'} \left\{ \gamma_1 e^{i(\omega' + \omega)t} (A^\dagger(\omega) A^\dagger(\omega') \rho_S(t) - A^\dagger(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega)) + \right. \\
 & + \gamma_2 e^{i(\omega' + \omega)t} (\rho_S(t) A^\dagger(\omega') A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A^\dagger(\omega')) + \\
 & + \gamma_3 e^{i(\omega - \omega')t} (A^\dagger(\omega) A(\omega') \rho_S(t) - A(\omega') \rho_S(t) A^\dagger(\omega)) + \\
 & \left. + \gamma_4 e^{i(\omega - \omega')t} (\rho_S(t) A(\omega') A^\dagger(\omega) - A^\dagger(\omega) \rho_S(t) A(\omega')) + h.c. \right\}, \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

que nada mais é do que a equação (2.19).

Apêndice B

Breve Explicação do Raciocínio por trás do uso do Wolfram Mathematica

Os principais resultados presentes do capítulo 5 dessa dissertação foram extraídos com o auxílio do *Wolfram Mathematica*, em sua versão 13.2. Ademais, usamos a biblioteca do Melt! para funções específicas, esta podendo ser encontrada (com respectivas explicações e tutoriais) no endereço <https://melt1.notion.site/>. Este apêndice serve para elucidarmos o uso desse ferramental, tomando como base o que foi feito para o cenário de um único fóton.

Antes de tudo, definimos as variáveis de interesse dentro de um módulo de código (*Module*), de sorte que apenas as probabilidades de interesse e a soma das distribuições de tempo de espera fossem imprimidas para dados valores dessas variáveis (Figura B.1). O caso mais geral possível foi feito, levando em conta todas as variáveis não nulas e distintas, bem como a possível interação elétron-fônon comentada no texto, mesmo que tenhamos considerado apenas o caso particular na dissertação. Isso porque assim podemos reaproveitar o código na hora de extrair resultados de outra natureza, em que outras considerações são feitas no nosso modelo.

As variáveis que são usadas para imprimir as probabilidades p_e , p_γ , p_m e $WtdSUM$ que são, respectivamente, a probabilidade de detecção de uma fotocorrente, a probabilidade de um fóton vazar, probabilidade de um elétron trocar energia com um fônon e decair, e a soma das distribuições de tempo de espera de cada um desses canais, são as constantes de acoplamento do nosso modelo, κ , Γ_e , Γ_g , γ_ϕ , γ_m ($= \gamma_-$, na notação do

```

W[nmax_, {x_, xe_, xg_}, {gamma_phi_, gamma_m_}, {Ad_, dr_}, g_, xi_] :=
Module[{Sg, Se, Sm, A, Ad, Sz, H, L, rho, Le, Lgamma, L0, psi0,
[modulo de código]
  cops, rates, wtdC, wtdE, wtdM, wtdSUM, pgamma, pe, pm, Lm, z},
  (*Parte bosônica*)
  LoadBosonicOperators[nmax, "a"];
  (*Parte fermiônica*)
  vg = {1, 0, 0};
  v0 = {0, 1, 0};
  ve = {0, 0, 1};
  sg = out[v0, vg];
  se = out[v0, ve];
  sm = out[vg, ve];
  (*Os dois juntos*)
  Sg = kron[Sg, I];
  Se = kron[se, I];
  Sm = kron[sm, I];
  A = kron[Eye[3], a];
  Ad = kron[Eye[3], a'];
  Sz = kron[out[ve, ve] - out[vg, vg], I];
  (*Hamiltoniana*)
  H =  $\frac{\Delta d}{2}$  * Sz + dr * Ad.A + g * (Ad.Sm + A.Sm') + g' * (Ad + A);
  (*Liouvilliano*)
  cops = {Sg', Se, Sz, Sm, A};
  rates = {xg, xe,  $\frac{\gamma\phi}{2}$ , gamma_m, xi};
  L = Liouvillian[H, cops, rates] // cf;

  (*Estado inicial*)
  psi0 = kron[v0, Basis[nmax, 2]];
  rho = out[psi0, psi0];
  (*Jump operators*)
  Le = xe * JumpOp[Se];
  Lgamma = xi * JumpOp[A];
  Lm = gamma_m * JumpOp[Sm];
  (*No jump Liouvillian*)
  L0 = L - Lgamma - Le - Lm;
  (*Waiting Time Distribution para vazamento de fótons,
  detecção de fotocorrente e troca de energia elétron-fônon,
  respectivamente*)
  wtdC = WaitingTimeDistribution[L0, Eye[Length@L], Lgamma, rho];
  wtdE = WaitingTimeDistribution[L0, Eye[Length@L], Le, rho];
  wtdM = WaitingTimeDistribution[L0, Eye[Length@L], Lm, rho];
  wtdSUM = wtdC + wtdE + wtdM;
  z = LinearSolve[L0, Vec@rho];
  (*resolva equação linear*)
  pgamma = -UnTr[Lgamma.z];
  pe = -UnTr[Le.z];
  pm = -UnTr[Lm.z];
  {pgamma, pe, pm, wtdSUM} // Chop
  [substitui números pequenos por 0]
]

```

Figura B.1: Módulo de código que usamos para extrair as probabilidades p_γ , p_e e p_m , bem como a soma das distribuições de tempo de espera associadas a cada uma delas. Note que para obtermos os resultados do texto principal precisamos fazer $\Gamma_e = \Gamma_g \equiv \Gamma$ e $\Delta_r = \Delta_d = \gamma_m = \gamma_\phi = \xi = 0$.

capítulo 3), Δ_d , Δ_r , g e ξ . Dessas, a única que não apareceu explicitamente no nosso texto foi γ_ϕ , que tem a ver com a diferença de potencial entre o sistema e o ambiente. A escolha de $\gamma_+ = 0$, bem como a presença de γ_ϕ é baseada na equação mestra de [5], que será discutida ao longo dessa explicação.

No tocante as variáveis que constituem a parte interna do *Module* (i.e., as que contribuem apenas para a modelagem das quantidades que serão impressas, existindo apenas dentro dessa estrutura), temos os operadores fermiônicos e bosônicos, construídos no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \oplus \mathcal{H}_B$, em que \mathcal{H}_F é o espaço de Hilbert dos férmions (no nosso caso, sempre tridimensional) e \mathcal{H}_B o dos bósons (cuja dimensão é calibrada por n_{max}), o liouvilliano total \mathcal{L} , responsável pela dinâmica aberta do problema, com taxas dadas pela lista de constantes *rates* e dissipadores caracterizados pela lista de operadores *copecs*, o liouvilliano \mathcal{L}_0 que carrega o setor dinâmico sem pulos, o \mathcal{L}_j que carrega o setor dinâmico devido aos saltos j , a hamiltoniana H que caracteriza a dinâmica unitária e os operadores, as distribuições de tempo de espera $Wtdj$ do canal j e a variável auxiliar z . Novamente, vale olhar a Figura B.1 para maior clareza.

Tendo devido o *Module* sob essas condições, podemos prosseguir para a descrição qualitativa de seu funcionamento. Dada a hamiltoniana H , os *copecs* e os *rates*, o comando *Liouvillian* extrai uma matriz \mathcal{L} que represente o superoperador

$$\mathcal{L}\rho = -i \left[\tilde{H}, \rho \right] + \Gamma_{g0} \mathcal{D}[s_g^\dagger] \rho + \Gamma_{0e} \mathcal{D}[s_e] \rho + \gamma_- \mathcal{D}[\sigma_+^\dagger] + \frac{\gamma_\phi}{2} \mathcal{D}[\sigma_3] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho \quad (\text{B.1})$$

por intermédio de processos de vetorização da equação mestra [18]. Com isso, e definindo os superoperadores de pulo \mathcal{L}_j como matrizes pelo comando *JumpOp* (que aplica o mesmo processo de vetorização mencionado acima), podemos conceber \mathcal{L}_0 usando a expressão

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} - \sum_{j=\gamma,e,-} \mathcal{L}_j. \quad (\text{B.2})$$

Feito isso, o cálculo das distribuições de tempo de espera são dados pelo comando *WaitingTimeDistribution*, que pega o estado inicial $\rho = \rho_0^{(1)} = |\psi_1\rangle \langle \psi_0|$ e os superoperadores vetorizados \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_j e \mathcal{L}_k e performa

$$\text{WaitingTimeDistribution}[t, \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_k, \mathcal{L}_j, \rho] \rightarrow \frac{\text{Tr}\{\mathcal{L}_j e^{\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_k \rho\}}{\text{Tr}\{\mathcal{L}_k \rho\}}, \quad (\text{B.3})$$

Apêndice B. Breve Explicação do Raciocínio por trás do uso do Wolfram Mathematica

em que \mathcal{L}_k é a identidade nas dimensões de \mathcal{L}_0 , no nosso caso. Com isso, somos capazes de extrair todas as distribuições de tempo de espera e, conseqüentemente, *wtdSUM*.

Os cálculos das probabilidades p_γ , p_e e p_- são feitos usando a variável auxiliar z , pelo comando *LinearSolve*, que resolve uma equação matricial na forma $MX = B$ para uma matriz X (no nosso caso, ela encontrará \mathcal{L}_0^{-1}). Para tal, devemos definir ρ como um vetor, de sorte que o superoperador \mathcal{L}_0 seja uma matriz. Assim, as probabilidades p_j são dadas pela realização do traço da forma matricial do superoperador \mathcal{L}_j multiplicada por z .

Tendo as probabilidades e as distribuições de tempo de espera em mãos, o restante dos resultados apresentados no capítulo 5 podem ser obtidos por métodos convencionais (soma, integral, mudança de variável, esboço de gráficos, etc.), de modo que não precisamos discorrer mais sobre o código que usamos.

Bibliografia

- ¹H.-P. Breuer, F. Petruccione et al., *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press on Demand, 2002).
- ²W. G. Van der Wiel, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha e L. P. Kouwenhoven, “Electron transport through double quantum dots”, *Reviews of modern physics* **75**, 1 (2002).
- ³D. Roberts e A. A. Clerk, “Driven-dissipative quantum Kerr resonators: New exact solutions, photon blockade and quantum bistability”, *Physical Review X* **10**, 021022 (2020).
- ⁴C. Xu e M. G. Vavilov, “Full counting statistics of photons emitted by a double quantum dot”, *Physical Review B* **88**, 195307 (2013).
- ⁵D. Zenelaj, P. P. Potts e P. Samuelsson, “Full counting statistics of the photocurrent through a double quantum dot embedded in a driven microwave resonator”, *Physical Review B* **106**, 205135 (2022).
- ⁶T. Brandes, “Waiting times and noise in single particle transport”, *Annalen der Physik* **520**, 477–496 (2008).
- ⁷G. T. Landi, M. J. Kewming, M. T. Mitchison e P. P. Potts, “Current fluctuations in open quantum systems: Bridging the gap between quantum continuous measurements and full counting statistics”, arXiv preprint arXiv:2303.04270 (2023).
- ⁸P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 27 (Oxford university press, 1981).
- ⁹I. Rotter, “A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 153001 (2009).
- ¹⁰K. Gottfried, *Quantum mechanics: fundamentals* (CRC Press, 2018).
- ¹¹M. A. Nielsen e I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 2002.
- ¹²R. Shankar, *Principles of quantum mechanics* (Springer Science & Business Media, 2012).
- ¹³G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups”, *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119–130 (1976).
- ¹⁴V. Gorini, A. Kossakowski e E. C. G. Sudarshan, “Completely positive dynamical semigroups of N-level systems”, *Journal of Mathematical Physics* **17**, 821–825 (1976).
- ¹⁵B. O. Goes, “Wehrl entropy production theory for non-equilibrium quantum systems”, tese de dout. (Universidade de São Paulo, 2020).
- ¹⁶S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, vol. 2 (Cambridge university press, 1995).

- ¹⁷J. P. Santos e G. T. Landi, “Microscopic theory of a nonequilibrium open bosonic chain”, *Physical Review E* **94**, 062143 (2016).
- ¹⁸G. T. Landi, E. Novais, M. J. De Oliveira e D. Karevski, “Flux rectification in the quantum X X Z chain”, *Physical Review E* **90**, 042142 (2014).
- ¹⁹W. Khan, P. P. Potts, S. Lehmann, C. Thelander, K. A. Dick, P. Samuelsson e V. F. Maisi, “Efficient and continuous microwave photoconversion in hybrid cavity-semiconductor nanowire double quantum dot diodes”, *Nature communications* **12**, 5130 (2021).
- ²⁰M. W. Zemansky e R. H. Dittman, *Heat and thermodynamics*, 1998.
- ²¹D. Walls e G. Milburn, *Quantum Optics* (Springer Berlin Heidelberg, 2008).