

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Simulação de trajetórias de sistemas abertos de dois qubits continuamente monitorados

Lui Zuccherelli de Paula

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi - Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Prof. Dr. -

Prof. Dr. -

São Paulo  
2024



University of São Paulo  
Physics Institute

# Trajectory simulation of open two-qubit continually monitored quantum systems

Lui Zuccherelli de Paula

Supervisor: Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi

Dissertation submitted to the Physics Institute of the  
University of São Paulo in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Gabriel Teixeira Landi - Institute of Physics, University of São Paulo

Prof. Dr. -

Prof. Dr. -

São Paulo  
2024



*“... Afirman que la operación de contar modifica las cantidades y las convierte de indefinidas en definidas. El hecho de que varios individuos que cuentan una misma cantidad logran un resultado igual, es para los psicólogos un ejemplo de asociación de ideas o de buen ejercicio de la memoria. Ya sabemos que en Tlön el sujeto del conocimiento es uno y eterno.”*

— Jorge Luis Borges

## *Abstract*

A series of simulations of the quantum trajectories of open systems under continuous measurement were carried out. These systems were composed of two entangled qubits, connected to two external baths. Two types of system-baths couplings were used: model 1, in which both baths interacted only with a single qubit, and model 2, in which each bath interacted with a different qubit. The probability distribution of the interactions of the first model behaved as a Markov process, while, for the second model, it could have an arbitrarily long memory of previous interactions due to internal degeneracies. The simulations were done using the *Melt!* library of Wolfram Mathematica. The goal was to analyze the dependency of the dynamical properties of the systems on all the coupling parameters (between the qubits, between the system and baths and between the system and the measuring device), as well as to explore any non-trivial property that may arise when only parts of the system are being monitored. Two measurement protocols were simulated: a direct detection of quantum jumps, and a diffusive measurement via a Quantum Point Contact. The conditional density matrix of each individual trajectory was estimated for all time steps given the simulated measurement results, as well as other time-dependent variables like the von Neumann entropy and occupation of the qubits. Finally, quantities like the waiting time distribution, dynamical activity and noise were computed by marginalizing a large number of long simulations, and compared to the expected probability distribution of the system, when possible.

**Keywords:** Open Quantum Systems; Quantum Master Equation; Quantum Measurement; Quantum Point Contact; Quantum State Simulation.

## *Resumo*

Uma série de simulações das trajetórias quânticas de sistemas quânticos abertos sob medição contínua foram realizadas. Esses sistemas eram compostos por dois qubits emaranhados, conectados a dois banhos externos. Dois tipos de acoplamento sistema-banhos foram empregados: o modelo 1, onde ambos os banhos interagiam com um único qubit, e o modelo 2, onde cada banho interagia com um qubit distinto. A distribuição de probabilidades da interação no primeiro modelo se comportava como um processo de Markov, enquanto que as no segundo modelo podiam ter memória arbitrariamente longa de interações anteriores, em função de degenerescências do sistema. As simulações foram realizadas com a biblioteca *Melt!* do Wolfram Mathematica. O objetivo era analisar a dependência das propriedades dinâmicas do sistema em todos os acoplamentos (entre os qubits, entre o sistema e os banhos, e entre o sistema e o aparato de medição), além de explorar as propriedades não-triviais que aparecessem quando monitorava-se apenas uma parte do sistema. Dois protocolos de medição foram simulados: a detecção direta de saltos quânticos e a medida difusiva, por meio de um Ponto de Contato Quântico. A matriz densidade condicionada de cada trajetória individual foi estimada para cada passo, em função dos resultados de medição simulados, assim como outras variáveis dependentes do tempo, como a entropia de von Neumann e a ocupação dos qubits. Por fim, quantidades como a distribuição do tempo de espera, a atividade dinâmica e o ruído foram calculados, marginalizando uma grande série de simulações longas, e os resultados foram comparados com os seus valores esperados da distribuição de probabilidades do sistema, quando possível.

**Keywords:** Sistemas Quânticos Abertos; Equações Mestras Quânticas; Medida Quântica; Ponto de Contato Quântico; Simulação de Estados Quânticos.

## *Agradecimentos*

Aos meus pais, Moara Zuccherelli e Antonio Luiz Mello de Paula Filho, e à minha irmã, Lina Zuccherelli de Paula, por continuarem comigo, mesmo que cada vez mais eu consiga lhes explicar cada vez menos o que é isso que estou fazendo.

Ao professor Gabriel Landi, por ter me apresentado à informação quântica.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro durante o mestrado.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria da medida quântica</b>	<b>5</b>
2.1	Teoria da medida clássica . . . . .	6
2.1.1	Probabilidade clássica . . . . .	6
2.1.2	Medida perturbadora . . . . .	9
2.2	Teoria da medida quântica . . . . .	11
2.2.1	Medida projetiva . . . . .	13
2.2.2	Medida generalizada: aparato de medição e estados mistos . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Sistemas quânticos abertos</b>	<b>21</b>
3.1	Uma ponte entre medida generalizada e sistemas abertos . . . . .	22
3.2	Processos Markovianos . . . . .	25
3.2.1	Processos Markovianos clássicos . . . . .	25
3.2.2	Processos Markovianos quânticos . . . . .	28
3.3	Equação mestra quântica . . . . .	29
3.3.1	Equação mestra de Born-Markov . . . . .	31
3.3.2	Equação de Lindblad . . . . .	35
3.4	Modelo colisional e a equação de Lindblad local . . . . .	39
3.5	Teorema de Lindblad . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Salto quânticos</b>	<b>45</b>
4.1	Fotodeteção . . . . .	47
4.1.1	Equações diferenciais estocásticas . . . . .	51
4.1.2	Evolução estocástica da fotodeteção . . . . .	53
4.1.3	Múltiplos operadores de pulso . . . . .	56
4.2	Algoritmo da simulação numérica . . . . .	57
4.2.1	Cálculo analítico da evolução <i>não</i> condicionada e do estado estacionário . . . . .	59
4.3	Distribuição do tempo de espera . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Resultado das simulações de saltos quânticos para um sistema de dois qubits</b>	<b>65</b>
5.1	Modelo geral . . . . .	65
5.1.1	Convenções, notação e definições . . . . .	65
5.2	Resultados das simulações . . . . .	68
5.2.1	Trajетórias quânticas do sistema de dois qubits . . . . .	68
5.2.2	Evolução do estado não condicionado . . . . .	78
5.2.3	Trajетórias quânticas dos estados reduzidos dos qubits e sua entropia de von Neumann . . . . .	83
5.2.4	Atividade dinâmica . . . . .	87
5.3	Distribuição de tempos de espera do sistema de dois qubits . . . . .	89
5.3.1	Cálculo analítico das WTDs . . . . .	92
5.3.2	Cálculo numérico das WTDs utilizando as simulações . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Difusão quântica</b>	<b>101</b>
6.1	Equações diferenciais estocásticas e ruído Gaussiano . . . . .	102
6.2	Processos difusivos e medida Gaussiana fraca . . . . .	105
6.2.1	Processos difusivos e corrente . . . . .	105
6.2.2	Equação mestra estocástica para processos difusivos . . . . .	108
6.2.3	Medida Gaussiana fraca . . . . .	111
6.3	Ponto de contato quântico (QPC) . . . . .	114
6.4	Algoritmo da simulação numérica . . . . .	119
<b>7</b>	<b>Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits</b>	<b>121</b>
7.1	Modelo . . . . .	121
7.2	Resultado das simulações . . . . .	124
7.2.1	Trajетórias quânticas do sistema de dois qubits . . . . .	124
7.2.2	Dependência na eficiência da medida $\xi$ e evolução não condicionada . . . . .	134
7.2.3	Evolução da entropia de von Neumann . . . . .	137
7.3	Cálculo numérico das WTDs do sistema difusivo de dois qubits utilizando as simulações . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>152</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>155</b>

# Lista de Figuras

3.1	Ilustração da equação de Chapman-Kolmogorov. Marginalizando sobre todos os possíveis $x_2$ , obtemos o propagador de $x_1$ a $x_3$ . . . . .	28
3.2	Representação esquemática do modelo colisional. O banho é composto por múltiplas ancilas $A$ , idênticas e independentes, que, após interagirem localmente e uma por vez com o sistema, são descartadas. . . . .	40
4.1	Três realizações diferentes de trajetórias quânticas de um mesmo sistema de 1 qubit para o mesmo estado inicial $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle)$ . Plotamos a ocupação de seu estado excitado $ \langle\psi(t) 1\rangle ^2$ no tempo. A evolução unitária é dada pela Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x$ , as detecções de fótons emitidos indicadas pelas setas verdes. Notem que a detecção age no sistema com o operador $\hat{L} = \hat{\sigma}_-/\sqrt{2}$ , e ato contínuo o vetor de estado colapsa para o estado fundamental ( <i>i.e.</i> $ \langle\psi(t) 1\rangle ^2 = 0$ ). O quarto gráfico é a evolução do estado não condicionado do sistema. O intervalo de tempo das medições foi $dt = 0,001$ . Mais sobre os algoritmos utilizados para as simulações na seção 4.2. . . . .	49
4.2	Duas simulações distintas da evolução do número de detecções $N$ e seu incremento $dN$ para o sistema que será descrito na seção 5.1. O intervalo $dt$ foi exagerado para facilitar a visualização. . . . .	54
5.1	Evolução no tempo dada pela Hamiltoniana (5.1) das componentes $ \langle\psi(t) ij\rangle ^2$ (eixo $y$ ) do estado de um sistema <i>fechado</i> cujo estado inicial é $ \psi(0)\rangle =  10\rangle$ . As componentes não plotadas ( $ 11\rangle$ e $ 00\rangle$ ) permanecem nulas. . . . .	66
5.2	Esquema dos set-ups para processos pontuais. . . . .	67

5.3	Uma trajetória para $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ . Recordamos que as curvas (eixo $y$ ) indicam as componentes do vetor de estado na base dos autoestados da energia interna do sistema ( <i>i.e.</i> qubit 1 e qubit 2): $ \langle \psi(t)   ij \rangle ^2$ , para $i, j = 0, 1$ indicados na legenda. Foram plotadas levemente transparentes para que se possa ver quando se sobrepõe no zero (reiteramos que o sistema pode apenas estar em 3 regimes: $ \psi\rangle =  11\rangle$ , $ \psi\rangle = a 01\rangle + b 10\rangle$ ou $ \psi\rangle =  00\rangle$ ). Exceto quando explicitamente mencionado, não plotaremos nunca a ocupação do estado $ 00\rangle$ , para facilitar a leitura. . . . .	69
5.4	Uma trajetória para $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma = 1/2$ . Recordamos que o eixo $y$ corresponde às componentes do vetor de estado: $ \langle \psi(t)   ij \rangle ^2$ , para $i$ e $j$ indicados na legenda. Isso continuará válido para todos os próximos gráficos de trajetória e evolução não condicionada desse capítulo. . . . .	70
5.5	Trajetoórias $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ com estado inicial $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{2}( 00\rangle +  01\rangle +  10\rangle +  11\rangle)$ . Plotamos a componente $ 00\rangle$ pois aqui contribui para os estados antes de pulos repetidos. . . . .	71
5.6	Trajetoórias para diferentes parâmetros de acoplamentos $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ . . . . .	73
5.7	Evolução das trajetórias do modelo 1 (fig. 5.2a) para diferentes $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . . . . .	74
5.8	Evolução das trajetórias do modelo 2 (fig. 5.2b) para diferentes $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . . . . .	75
5.9	Evolução sem pulos da componente $ 01\rangle$ do estado do modelo 1 (fig. 5.2b) para diferentes $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ e o estado inicial era $ \psi(0)\rangle =  01\rangle$ . Note que para a componente $ 10\rangle$ e mesmo estado inicial, o gráfico seria o oposto a esse no eixo $y$ . . . . .	76
5.10	Evolução temporal das componentes do estado não condicionado do sistema para os diferentes modelos, variando a diferença entre os acoplamentos $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , iniciados no estado fundamental $ 00\rangle\langle 00 $ . Note que agora estamos tratando de um estado misto, mas mantivemos a notação de vetor para os elementos na diagonal principal por clareza. Para todos os gráficos, a evolução de $ 01\rangle\langle 10 $ é idêntica a $ 10\rangle\langle 01 $ . Todas as demais componentes não plotadas são nulas. . . . .	79
5.11	Estado estacionário do estado não condicionado do sistema em função da diferença entre os parâmetros de acoplamento com os banhos. No gráfico do modelo 2, fig. 5.11b, a componente $ 10\rangle\langle 01 $ e seu complexo conjugado coincidem. Todas as demais componentes não plotadas são nulas. . . . .	81
5.12	Evolução do estado excitado $\langle 1   \rho_i   1 \rangle$ dos estados reduzidos $\rho_i$ dos qubits $i = 1, 2$ no modelo 1 (fig. 5.2a) para diferentes $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . As curvas foram plotadas com transparência para que se possa visualizar quando se sobrepõe. As trajetórias, para cada $\Delta\gamma$ são as mesmas das da figura 5.7 . . . . .	83
5.13	Evolução do estado excitado $\langle 1   \rho_i   1 \rangle$ dos estados reduzidos $\rho_i$ dos qubits $i = 1, 2$ no modelo 2 (fig. 5.2b) para diferentes $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . As curvas foram plotadas com transparência para que se possa visualizar quando se sobrepõe. As trajetórias, para cada $\Delta\gamma$ são as mesmas das da figura 5.8 . . . . .	84

5.14	Evolução da entropia de von Neumann do estado reduzido do qubit 1 para diferentes valores de $\Delta\gamma$ . A entropia do qubit 2 é igual por simetria. Noque que ela é limitada por baixo por 0 e por cima por $\log(2) \approx 0,69$ (indicado com uma linha horizontal). Sobrepomos o estado excitado do qubit 1 para que se possa ter noção do estado do qubit em cada instante. . . . .	86
5.15	Evolução temporal sem-pulos das duas oscilações possíveis para a entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits do modelo 1 (fig. 5.2a) quando existe uma única excitação no sistema. $\Delta\gamma = \pm 0,5$ . As curvas foram calculadas numericamente. . . . .	87
5.16	As linhas coloridas são as atividades dinâmicas de 100 simulações numéricas individuais. A linha preta é a média para cada instante de tempo e a vermelha tracejada é a sua solução analítica. . . . .	88
5.17	Ruído da atividade dinâmica calculado a partir de 500 simulações numéricas individuais. A linha horizontal indica o valor esperado do ruído médio, calculado com a função <code>FCSNoise</code> , da biblioteca <i>Melt!</i> . . . . .	89
5.18	As seis distribuições de tempo de espera do modelo 1 (fig. 5.2a) calculadas analiticamente para $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ e diferentes valores de $\Delta\gamma$ . Para $\Delta\gamma = 0$ , assim como indicado nas equações (5.48) e (5.49), as curvas se sobrepõe. Para $\Delta\gamma = -0,5$ , as curvas tracejadas e as contínuas do gráfico da figura 5.18b trocariam de posição. . . . .	94
5.19	As seis distribuições de tempo de espera do modelo 2 (fig. 5.2b) calculadas analiticamente para $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ e diferentes valores de $\Delta\gamma$ . Note que para $\Delta\gamma = 0$ , as quatro últimas distribuições, começadas em $ \psi_0\rangle$ e $ \psi_2\rangle$ , estão se sobrepondo. Atente, também, que apesar das cores terem sido mantidas as mesmas da figura 5.18, trocamos nas curvas rosa e vermelha o tracejado pela linha contínua, para facilitar a leitura nas curvas que se sobrepõe. . . . .	95
5.20	Histograma do intervalo de tempo entre pulos para 1000 simulações de duração de 1000 unidades de tempo. Notamos que assim como para a solução analítica, para $\Delta\gamma = 0$ existe uma simetria à troca de pulos ( $W(t, \uparrow   \uparrow, \downarrow) = W(t, \downarrow   \downarrow, \uparrow)$ , etc.). . . . .	97
5.21	Comparação das WTDs para o modelo 1 (fig. 5.2a). . . . .	100
5.22	Comparação das WTDs para o modelo 2 (fig. 5.2b). . . . .	100
6.1	Esquema da medição contínua de um qubit em contato com dois banhos por meio da corrente passando por um ponto de contato quântico (QPC). Excitações entram no sistema vindas do banho 1, agindo localmente como o operador de pulo $\hat{L}_1 = \gamma_1 \hat{\sigma}_+$ , e saem para o banho dois, agindo como o operador de pulo $\hat{L}_2 = \gamma_2 \hat{\sigma}_-$ . O operador de medição, dado pela interação entre o sistema e o QPC, é $\hat{M} = \lambda \hat{\sigma}_z$ . $\gamma_{1,2}$ e $\xi$ são constantes positivas, e $\mu_E > \mu_D$ são os potenciais químicos dos contatos do QPC. . . . .	114
7.1	Esquema dos set-ups para a medição por QPC de um sistema aberto de dois qubits. . . . .	122

7.2	Simulação da corrente difusiva de resultados de medição para dois valores de $\Delta\gamma$ no modelo 1, monitorando o qubit 1. À direita vemos um histograma resultado da marginalização no tempo dos valores da corrente. Os demais parâmetros $\xi = 1$ e $\gamma = 0,5$ foram mantidos fixos. . . . .	124
7.3	Trajétórias para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ e $\xi = 1$ . O gráfico de cima corresponde ao caso da figura 7.3a, onde o qubit 1 (o em contato com os banhos) é monitorado pelo QPC. O gráfico de baixo, ao caso da figura 7.3b, em que o qubit 2 (o isolado) é monitorado. Os histogramas da marginalização no tempo da ocupação dos qubits foram calculados utilizando simulações de duração de 1000 unidades de tempo, com intervalos $dt = 0.01$ (ou seja: total de 10 mil passos). Como cada gráfico depende de quatro parâmetros, eles sempre serão indicados à direita, acima da legenda, para evitar confusão. . . . .	125
7.4	Trajétórias do estado reduzido dos dois qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para o parâmetro $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,1$ e para $\gamma = 0,01$ . Pode-se claramente perceber que a influência do QPC domina as trajetórias. Atente que o gráfico da trajetória para $\gamma = 0,01$ começa em $t = 300$ , pois este é o primeiro pulso do qubit monitorado. . . . .	127
7.5	Trajétórias no modelo 2 para diferentes valores de $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ e $\xi = 1$ . Todos os demais comentários na legenda da figura 7.3 sobre as simulações continuam válidos. . . . .	129
7.6	Trajétórias dos estados reduzidos no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes $\Delta\gamma$ e $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ fixo. . . . .	132
7.7	Trajétórias dos estados reduzidos no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes $\Delta\gamma$ e $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ fixo. . . . .	133
7.8	Trajétórias dos estados reduzidos no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes eficiências da medida $\xi$ . . . . .	134
7.9	Trajétórias dos estados reduzidos no modelo 2 (fig. 7.1) p para diferentes eficiências da medida $\xi$ . . . . .	135
7.10	Evoluções não condicionadas do estado excitado nos dois modelos (fig. 7.1) para $\xi = 0$ . . . . .	136
7.11	Evoluções não condicionadas do estado excitado nos dois modelos (fig. 7.1) para $\xi = 1$ . . . . .	136
7.12	Componente excitada dos estados estacionários não condicionados dos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) em função de $\xi$ . Essa variação apenas é perceptível para $\gamma$ pequeno. . . . .	137
7.13	Trajétórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits $S(\rho_j)$ sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes valores do acoplamento com os banhos $\gamma \equiv \gamma_1 = \gamma_2$ . A linha em $\log(2) \approx 0,69$ indica a entropia máxima de um qubit. . . . .	138
7.14	Trajétórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits $S(\rho_j)$ sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes valores do acoplamento com os banhos $\gamma \equiv \gamma_1 = \gamma_2$ . . . . .	139

7.15	Trajatórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits $S(\rho_j)$ sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits em ambos os modelos (fig. 7.1) para diferentes valores da eficiéncia da medida $\xi$ . . . . .	140
7.16	Trajatórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits $S(\rho_j)$ sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes valores da diferença entre os acoplamentos com os banhos $\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$ . . . . .	142
7.17	Trajatórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits $S(\rho_j)$ sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes valores da diferença entre os acoplamentos com os banhos $\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$ . . . . .	143
7.18	Identificaçaõ dos pulos nas trajatórias dos estados reduzidos dos qubits monitorados, sobreposto à evoluçaõ de suas trajatórias no modelo 1 (fig. 7.1) para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ . . . . .	144
7.19	Histogramas da distribuçaõ de tempos de espera (WTD) para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Todos os gráficos dessa seçaõ foram normalizados, e obtidos para uma eficiéncia de mediçaõ $\xi = 1$ . Foram empregadas 100 simulações com sementes distintas, cada uma de duraçaõ de 10 mil unidades de tempo, para se extrair esses intervalos entre pulos. Foram identificados no total de 150 418 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 79 287 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 41 e 70 unidades de tempo, respectivamente. . . . .	145
7.20	Recorte das primeiras duas unidades de tempo dos histogramas da WTD da figura 7.19, para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. . . . .	146
7.21	Histogramas da distribuçaõ de tempos de espera (WTD) para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$ para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 111 786 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 95 893 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 183 e 172 unidades de tempo, respectivamente. . . . .	147
7.22	Histogramas da distribuçaõ de tempos de espera (WTD) para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,01$ para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Devido às limitações de memória RAM, as 100 simulações foram mais curtas, de duraçaõ de 2 000 unidades de tempo, sendo identificados no total de 20 669 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 19 959 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 608 e 603 unidades de tempo, respectivamente. . . . .	147
7.23	Trajatória de duraçaõ de 1000 unidades de tempo dos estados reduzidos dos qubits para $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,001$ e $\xi = 1$ no modelo 1. Por simplicidade, plotamos apenas um dos monitoramentos. . . . .	148

7.24 Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para intervalo entre medições  $dt = 0,001$ , mantendo os demais parâmetros iguais ao da WTD da figura 7.21:  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. As 100 simulações foram mais curtas, de duração de 500 unidades de tempo. Foram identificados no total de 5 784 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 5 037 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 136 e 137 unidades de tempo, respectivamente. . . . . 149

7.25 Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e  $\Delta\gamma = 0,7$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 39 007 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 41 828 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 198 e 281 unidades de tempo, respectivamente. . . . . 150

7.26 Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 2 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 13 876 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 13 858 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 53 e 50 unidades de tempo, respectivamente. . . . . 150



# 1

## Introdução

Existe uma aparente contradição inerente à mecânica quântica: por um lado, ela é frequentemente descrita como a teoria científica com maior poder preditivo de todos os tempos [1, 2], mas, por outro, quando medimos um sistema quântico, na maioria dos casos é impossível saber de antemão qual vai ser o resultado dessa medição. Mesmo sendo possível calcular com precisão ímpar a probabilidade de cada resultado possível, *qual* dentre eles será detectado em uma medição específica permanece o mais completo mistério. Até hoje não foi encontrada uma descrição determinística efetiva para o que leva um sistema quântico a colapsar a um ou a outro estado — pelo contrário, já foi provado de mais de uma forma que uma descrição desse tipo nem sequer é condizente com a teoria atual [3, 4].

Durante as primeiras décadas do desenvolvimento da mecânica quântica, esse problema era de ordem majoritariamente filosófica e epistemológica. Alguns exemplos desses debates ficaram imortalizados na história da física, como o artigo de Einstein, Podolsky e Rosen de 1935 [5], a resposta de Bohr [6], os múltiplos livros de Heisenberg ou Schrödinger, ou teorias que a princípio soam quase exóticas, como as interpretações de muitos mundos de Everett [7].

No entanto, à medida que os físicos foram se deparando com problemas concretos, tanto experimentais quanto teóricos, e em áreas tão diversas quanto a ótica [8] e a computação [9], foi preciso encontrar maneiras de modelar matematicamente esses comportamentos metafisicamente inexplicáveis. Pode-se dizer que as perguntas mais fundamentais, como a natureza da “observação” e do colapso da função de onda na mecânica quântica, continuam no ar, mas o progresso provocado pela **teoria da informação quântica** foi

suficiente para desencadear o que hoje é conhecido como a “segunda revolução quântica” [10], possibilitando aplicações práticas (ou, ao menos, o potencial para tanto em um futuro próximo) em tecnologias como sensores [11], computadores [12, 13], comunicação segura à longa distância [14], e até em áreas anteriormente quase inacessíveis para a quântica, como a gravitação [15, 16].

Começaremos, nos primeiros dois capítulos, com uma breve introdução a duas áreas fundamentais da teoria da informação quântica: a teoria da medida quântica e a de sistemas quânticos abertos. **A função dessa introdução será justificar física e matematicamente vários dos argumentos e escolhas feitos nos capítulos posteriores. Muito do seu conteúdo não será diretamente utilizado nas simulações (como a dilatação de Stinespring ou o modelo colisional), e o leitor já bem familiarizado deve se sentir livre para pular diretamente para o capítulo 4. Meu objetivo, no entanto, era que qualquer bacharel em física fosse capaz de acompanhar este trabalho sem muita dificuldade. Julguei necessário fazer uma introdução desse tipo porque é a minha impressão pessoal que muito (principalmente da teoria de sistemas quânticos abertos) do que parece à primeira vista um conjunto de escolhas arbitrárias, tem, na verdade, uma motivação física bastante acessível por trás. Começar direto com a dedução da equação estocástica de Schrödinger (capítulo 4) teria talvez sido suficiente para a compreensão do modelo, mas dificilmente deixaria o leitor iniciante satisfeito.**

No capítulo 2, trataremos da **teoria da medida quântica** [17, 18], que possibilita, dentre outras coisas, o estudo de sistemas quânticos medidos indiretamente, por meio do *operador de medição generalizado*. Experimentalmente, não é possível ter acesso direto ao sistema em si sem destruí-lo, mas é possível estimar indiretamente o seu estado pelo modo como interage com um sensor. Se queremos entender como sistemas no mundo real se comportam, **devemos ser capazes de modelar como medições reais evoluem um sistema.**

Na sequência, no capítulo 3, estudaremos a **teoria de sistemas quânticos abertos** [19], que modela sistemas quânticos em interação com o ambiente externo. Como mostraremos, nem a equação de Schrödinger, nem a de von Neumann, são capazes de modelar as dinâmicas irreversíveis de sistemas abertos, então todo um novo formalismo teve que ser desenvolvido: a *equação de Lindblad*. Novamente, isso é de interesse também prá-

tico: como é quase impossível manter qualquer objeto completamente isolado (e, como veremos, o próprio ato de medir é de certa forma uma violação desse isolamento), é de vital importância ser capaz de entender como o sistema evolui nessas circunstâncias.

Em particular, nosso objetivo neste trabalho é estudar a evolução de sistemas quânticos abertos individuais sob *monitoramento contínuo*. “Monitoramento contínuo” (ou apenas “monitoramento”) significa que, a cada intervalo infinitesimal de tempo, uma medida é realizada no sistema, devolvendo para o observador um resultado. Como veremos, se uma série de condições for satisfeita, podemos utilizar o formalismo de sistemas quânticos abertos para descrever a evolução média do sistema sob monitoramento contínuo. No entanto, as evoluções individuais do sistema (ou *trajetórias*, como são chamadas) muitas vezes apresentam comportamentos não triviais (como o efeito de Zeno quântico [19], por exemplo), que se cancelam e não são identificáveis na evolução média. Como continua impossível prever as evoluções individuais, precisamos, para analisar as propriedades das trajetórias, simular numericamente a evolução dos sistemas, determinando estocasticamente o resultado de cada medição (segundo a distribuição de probabilidades calculada com a equação de Lindblad), condicionando o estado do sistema, em cada instante, a toda a série de resultados anteriores.

As simulações das trajetórias desse sistema aberto de dois qubits continuamente monitorado, e suas respectivas análises, consistem nos resultados originais da presente dissertação. Utilizaremos dois protocolos de medição, detecção direta e medida difusiva, representantes dos dois tipos de processos estocásticos mais comuns: o processo pontual e o difusivo, respectivamente. **Para cada conjunto de parâmetros, estudaremos tanto as variáveis mensuráveis em evoluções individuais dos sistemas (como a ocupação e a entropia de von Neumann dos qubits), quanto compararemos valores médios, extraídos de um grande número de simulações distintas, com as suas distribuições esperadas, calculadas analiticamente utilizando métodos da teoria de sistemas quânticos abertos (como a atividade dinâmica e a distribuição de tempos de espera entre pulos) [20].**

No capítulo 4 introduziremos o primeiro protocolo de medição: a **detecção direta de saltos quânticos**, onde as trocas de energia entre o ambiente e o sistema são diretamente identificadas, e o sistema evolui condicionado a elas. O capítulo 5, traz os resultados e a análise das simulações.

No capítulo 6 é apresentado o segundo protocolo: a **medida difusiva**, modelando um tipo de detector real chamado de **Ponto de Contato Quântico** (QPC, no acrônimo em inglês) [21], onde a ocupação de um dos qubits pode ser estimada em função da variação que ela provoca na corrente elétrica do QPC. Os resultados e a análise dessas simulações serão apresentados no capítulo 7.

Por fim, o capítulo 8 traz as conclusões e perspectivas para estudos futuros.

## 2

### Teoria da medida quântica

Muito do que faz dos sistemas quânticos um tema de estudo interessante é a sua natureza inerentemente estatística. Ouvimos desde antes de entrar na faculdade (muitas vezes de maneira bastante precipitada, quando não puramente falsa) como no *mundo quântico* “tudo está em uma superposição de todos os estados possíveis” até aparecer um *observador* e, como em um passe de mágica, *colapsar* o sistema em um único estado concreto. Por mais místico que soe, nada disso é de todo falso, mesmo que confusões e interpretações objetivamente erradas sejam frequentes. Muito da dificuldade reside no fato de que todas as partes da frase acima estão, da maneira como foram postas, extremamente mal definidas — e que não se pense que essa falta de rigor é exclusiva a explicações leigas, mesmo aqueles com bacharel em física dificilmente poderiam explicar o fenômeno aparentemente axiomático do colapso da função de onda ao se realizar uma medição, definido por um dos quatro postulados da mecânica quântica [22]: quando medimos **a quantidade física  $\Omega$** , representada pelo operador Hermitiano  $\hat{\Omega}$ , uma partícula no estado  $|\psi\rangle$  evolui imediatamente para um dos autoestados  $|\omega\rangle$  de  $\hat{\Omega}$  — o que, inclusive, entra em conflito com outro dos postulados, visto que essa evolução  $|\psi\rangle \rightarrow |\omega\rangle$  não satisfaz a equação de Schrödinger **por ser descontínua e irreversível (exceto se  $|\psi\rangle = |\omega\rangle$ )** [17]. A evolução no sistema provocada pelo ato de medir é de caráter fundamentalmente distinto das evoluções provocadas por Hamiltonianas. Existe uma contradição aí, pois por um lado a medição só faz sentido se assumirmos que a informação é extraída de um domínio quântico para um domínio clássico, mas, por outro, o domínio clássico não pode ser inerentemente distinto do quântico, visto que se trata apenas da aproximação deste para o limite macroscópico.

O *corte de Heisenberg*, como é chamada a escala em que podemos tratar um sistema como puramente clássico, deveria ser apenas uma ferramenta para simplificação de contas, não uma fronteira física. Esse paradoxo não pode ser subestimado, ele está por trás de hipóteses extremamente ambiciosas como a da *interpretação de muitos mundos* da mecânica quântica, de Hugh Everet [7]. “O que é uma medida na mecânica quântica” nunca fica muito claro mesmo nos cursos intermediários.

Este capítulo tomou como base principalmente os livros *Quantum Measurement and Control* [17], de Howard M. Wiseman e Gerard J. Milburn, e *The Theory of Open Quantum Systems* [19], de Heinz-P. Breuer e Francesco Petruccione. Alguns dos temas tratados a seguir soam talvez básicos demais para uma dissertação que não tem como foco principal teoria da medida *per se*, mas se faz necessário apresentá-los mais por uma questão epistemológica do que física ou matemática. Paradigmas como a *subjetividade da probabilidade* ou a *perspectiva operacional da mecânica quântica* podem até soar como meras curiosidades filosóficas, mas possuem consequências concretas nas matrizes de estado, presentes no final deste trabalho.

Mas, antes de podermos propriamente discutir mecânica quântica, precisamos recuar um pouco. Para se poder apreciar, de fato, aquilo que faz dos sistemas quânticos tão diferentes, precisamos primeiro ter bem claro como um sistema clássico se comporta.

## 2.1. Teoria da medida clássica

### 2.1.1. Probabilidade clássica

Começamos definindo alguns conceitos: a *configuração de um sistema* é o conjunto de suas variáveis (*e.g.* posição e momento de uma partícula), e os possíveis valores dessas variáveis formam o *espaço de configurações*  $\mathbb{S}$  do sistema. Se temos um conjunto de  $N$  partículas com posição e momento livres nas três dimensões, por exemplo, esse espaço de configurações será  $\mathbb{R}^{6N}$ ; já se o sistema for uma moeda, a variável binária  $X \in \mathbb{S} = \{\text{cara, coroa}\}$ , etc.

Agora definamos o conceito de *estado* de um sistema clássico: ele é a distribuição de probabilidade no espaço de configurações, e representa o conhecimento do observador sobre o sistema. Esta segunda afirmação é significativa: assim como no livro de Wise-

man e Milburn [17], adotaremos a perspectiva de que as probabilidades são *subjetivas*, *i.e.* dependem do observador e de seu conhecimento do objeto sendo medido, e não são uma propriedade inerente dele. Ou seja: dois observadores com conhecimentos diferentes poderão estimar estados diferentes para o mesmo sistema (desde que esses estados sejam consistentes entre si, como será definido mais adiante), além do fato de que a simples aquisição de informação poderá mudar imediatamente esse estado. Isso pode parecer um detalhe quase filosófico, mas veremos, mais adiante, consequências diretas desse paradigma para a evolução da matriz de estado dos sistemas que simularemos.

$\Pr[\cdot]$  dá a probabilidade de um evento acontecer. Assim, se  $X$  for uma variável discreta, a probabilidade dela ter o valor  $x \in \mathbb{S}$  é  $\Pr[X = x]$ <sup>1</sup>, que por simplicidade chamaremos de  $\varphi(x)$ . Se, por outro lado,  $X$  for uma variável contínua, então devemos definir  $\varphi(x)$  como uma *densidade* de probabilidade tal que  $\varphi(x) dx = \Pr[X \in (x, x + dx)]$ . Em ambos os casos, a função  $\varphi(x)$  representa o estado do sistema para todo valor de  $x$ .

Em um sistema *clássico*, um observador capaz de realizar uma medida perfeita de  $X$  obteria, *e.g.*, um valor  $\tilde{x}$  e teria conhecimento completo sobre o sistema. Não restaria margem nenhuma para incerteza. O estado passaria a ser uma função  $\delta$  de Kronecker  $\varphi(x) = \delta_{x,\tilde{x}}$  caso  $X$  seja discreta, ou  $\delta$  de Dirac  $\varphi(x) = \delta(x - \tilde{x})$  caso seja contínua.

Deste ponto em diante nos limitaremos a tratar somente das variáveis discretas, pois são as únicas que serão empregadas neste trabalho. É bom ter em mente, contudo, que todos os conceitos apresentados a seguir podem facilmente ser reescritos para variáveis contínuas.

Entretanto, em geral (e em especial na quântica) o que de fato aferimos não é o sistema em si, mas sim um aparato de medição cuja variável  $Y$  de alguma maneira é correlacionada à variável  $X$  do sistema, podendo ser obtida dessa conexão uma dependência estatística [17]. Assim, ao medirmos o aparato obtemos um resultado  $y$  com probabilidade  $\varphi(y)$ , o que pode nos levar a descobrir indiretamente a configuração do sistema. Contudo, quase sempre essa correlação não é perfeita e algum ruído se introduz entre a

---

<sup>1</sup>Formalmente, uma **variável aleatória**  $X$  é um mapa

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde  $\Omega$  é o nosso espaço amostral que contém os *eventos* cuja probabilidade estamos medindo. Assim, dado um evento  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = x \in \mathbb{R}$ , onde chamamos  $x$  da **realização** da variável aleatória  $X$ .

nossa medição e o sistema. Esse ruído pode ser modelado como uma segunda variável aleatória  $\Xi$  com distribuição de probabilidade  $\wp(\xi)$ , e a variável de nosso aparato é dada por uma função tanto de  $X$  quanto de  $\Xi$ .

Como, então, poderemos saber qualquer coisa sobre o sistema se não podemos acessá-lo diretamente? Aqui entra em jogo a **inferência Bayesiana** [17]. Consideremos primeiro o caso de medida não-perturbadora, ou seja, que, medindo  $Y$ , não altera  $X$ . Lembre, contudo, do que foi dito anteriormente: posto que há uma conexão entre a variável do aparato e a do sistema, e que essa conexão é conhecida, descobrir algo sobre  $Y$  nos leva a aprender algo sobre  $X$ . Portanto, mesmo que este último não mude, o *estado do sistema*  $\wp(x)$  é atualizado.

Ou seja, estamos tratando, na verdade, do estado *condicional* do sistema (as vezes também chamado de estado *a-posteriori* ou *posterior*). Relembremos a definição de probabilidade condicional [17]:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \quad (2.2)$$

onde  $\Pr(A|B)$  é a “probabilidade de ocorrência do evento  $A$  dado que ocorreu o evento  $B$ ”. Aplicando essa regra duas vezes, chegamos ao *teorema de Bayes* [17]:

$$\wp'(x|y) = \frac{\wp(y|x)\wp(x)}{\wp(y)}. \quad (2.3)$$

Usaremos aqui o apóstrofe para indicar o estado condicionado à medição. Com a equação (2.3) podemos inferir o estado *a-posteriori* do sistema  $\wp'(x|y)$  em função do seu estado *a-priori*  $\wp(x)$  e da estatística do aparato.

Esta última é dada por duas partes. Primeiro requeremos que  $\wp(y) = \sum_x \wp(y|x)\wp(x)$  para que o estado condicionado do sistema seja normalizável. Já a probabilidade condicional  $\wp(y|x)$  é obtida marginalizando os efeitos do ruído na variável do aparato.

Seja  $G$  uma função de saída que descreve como as variáveis do ruído e do sistema determinam a variável do aparato:  $Y = G(X, \Xi)$ . Assumindo que  $G$  deve ser inversível,



o ruído pode ser descrito como  $\Xi = G^{-1}(X, Y)$ :

$$\begin{aligned} \wp(y|x) &= \sum_{\xi} \wp(y|x, \xi) \wp(\xi) = \sum_{\xi} \delta_{y, G(x, \xi)} \wp(\xi) \\ &= \sum_{\xi} \delta_{\xi, G^{-1}(x, y)} \wp(\xi) = \wp(\xi := G^{-1}(x, y)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $\wp(x := a) \equiv \{\wp(x) : x = a\}$ <sup>2</sup>. Podemos, portanto, reescrever (2.3) para o caso da medição ruidosa como [17]:

$$\wp'(x|y) = \frac{\wp(\xi := G^{-1}(x, y)) \wp(x)}{\wp(y)}. \quad (2.5)$$

Marginalizando esse resultado nas medições do aparato (ou seja, tirando a média ponderada dos resultados, análogo à distribuição de probabilidade que obteríamos se realizássemos uma medição mas ignorássemos o seu resultado), obtemos o estado posterior *não condicionado*:

$$\wp'(x) = \sum_y \wp'(x|y) \wp(y) = \sum_y \wp(\xi := G^{-1}(x, y)) \wp(x). \quad (2.6)$$

Caso a medida seja de fato não-perturbadora, esperamos que  $\wp'(x) = \wp(x)$ , ou seja: se realizamos uma medição mas ignoramos seu resultado, o estado do sistema não deve mudar. Isso está de acordo com o nosso paradigma da subjetividade da probabilidade.

### 2.1.2. Medida perturbadora

Podemos ser mais gerais, contudo. Até agora, tratou-se apenas de medições não-perturbadoras, mas podemos incluir no teorema de Bayes medidas que, ao serem realizadas, provocam alterações no sistema, conhecidas pelo nome em inglês: *back-actions*. Fazemo-lo incluindo operações  $\mathcal{B}_y(x_2|x_1)$  que agem após a aplicação de (2.3), e correspondem à probabilidade de que o resultado  $Y = y$  da medida provoque a transição do sistema do estado em que  $X = x_1$  para o estado em que  $X = x_2$ .

Por exemplo: seja  $\wp(x)$  o estado de um sistema com variável discreta  $X$  que pode

---

<sup>2</sup>Estamos empregando a notação utilizada por [17]: as letras maiúsculas são variáveis e as minúsculas são valores. Portanto,  $x = a$  significa dizer que  $x$ , que é a realização da variável  $X$ , seja ele qual for, aqui em particular é igual a um valor específico  $a$ .

assumir qualquer configuração no espaço  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  e seja  $Y$  o resultado de uma medida. Neste caso, a operação  $\mathcal{B}_y$  será uma matriz com elementos  $\mathcal{B}_y(x_2|x_1)$  tal que, para todo  $y, x_1$  e  $x_2$ ,  $\mathcal{B}_y(x_2|x_1) \geq 0$  e  $\sum_{x_2} \mathcal{B}_y(x_2|x_1) = 1$ . Isso faz sentido físico: se essa é uma matriz de probabilidades de transição de um estado  $x_1$  para o outro  $x_2$  em função do resultado  $y$  da medição, queremos que todas sejam positivas e que dado um estado inicial a soma das probabilidades de transição para estados finais seja um.

Queremos agora achar o estado a-posteriori  $\wp'(x_2|y)$ , ou seja, do estado não só em função da mudança em nosso conhecimento sobre o sistema devido ao resultado que obtivemos ao medi-lo, mas também tendo em mente como essa medição possivelmente alterou o valor da variável  $X$ . Em outras palavras, para sabermos a probabilidade de após a medição  $X = x_2$ , temos que levar em conta todos os estados iniciais  $X = x_1$  que ao serem medidos podem evoluir para  $X = x_2$  com probabilidade  $\mathcal{B}_y(x_2|x_1)$ :

$$\wp'(x_2|y) = \sum_{x_1} \mathcal{B}_y(x_2|x_1) \wp'(x_1|y) = \sum_{x_1} \mathcal{B}_y(x_2|x_1) \frac{\wp(y|x_1) \wp(x_1)}{\wp(y)}. \quad (2.7)$$

Evidente que recuperamos a equação (2.3) quando  $\mathcal{B}_y(x_2, x_1) = \delta_{x_1, x_2}$ .

Contudo, não tem muito por que separar a evolução no estado provocada pelo aumento de nosso conhecimento sobre o sistema da evolução  $X = x_1 \rightarrow X = x_2$  do próprio sistema provocada pela *back-action* da medição, visto que tudo que temos acesso de fato é o resultado  $y$  e o que podemos inferir sobre o estado  $\wp$ . Definamos, portanto, o *mapa de evolução* [17], que não discrimina entre ambos os casos:

$$\mathcal{O}_y(x_2|x_1) = \mathcal{B}_y(x_2|x_1) \wp(y|x_1). \quad (2.8)$$

Note que  $\mathcal{O}_y(x_2|x_1)$  nos leva de um estado a-priori  $\wp(x_1)$  a um estado a-posteriori (não normalizado)  $\wp'(x_2|y) = \sum_{x_1} \mathcal{O}_y(x_2|x_1) \wp(x_1)$ . Mapas desse tipo, que levam estados a estados, são chamados de *mapas positivos* [9, 17]. Para normalizá-lo, multiplicamos por  $\sum_{x_2} \sum_{x_1} \mathcal{O}_y(x_2|x_1) \wp(x_1) \equiv \wp(y)$ , ou seja: marginalizando sobre todas as transições possíveis e ponderando pelo estado inicial, tudo que nos resta é a probabilidade do resultado da medição ser  $Y = y$ .

É interessante, contudo, dar mais um passo e tentar reescrever esses mapas em função unicamente do estado final e do resultado da medida, pois frequentemente não nos

interessa o valor inicial  $x_1$ . Usamos que

$$\sum_y \wp(y) = 1 \Rightarrow \sum_{y, x_1, x_2} \mathcal{O}_y(x_2|x_1)\wp(x_1) = 1 = \sum_{x_2} \wp(x_2). \quad (2.9)$$

Para recuperar a dependência no resultado da medida, introduzimos um conjunto de vetores  $\{E_y(x)\}$  que satisfazem a *condição de completude* [9, 17]:

$$\forall x, \quad \sum_y E_y(x) = 1. \quad (2.10)$$

Ou seja, temos, portanto, a igualdade:

$$\sum_{x_2} E_y(x_2)\wp(x_2) = \sum_{x_2} \sum_{x_1} \mathcal{O}_y(x_2|x_1)\wp(x_1), \quad (2.11)$$

que, para o caso discreto descrito acima, será um vetor de dimensão  $n$  e elementos positivos  $E_y(x) = \wp(y|x)$ .

A condição de completude (2.10) e  $\mathcal{O}_y$  ser um mapa positivo são as únicas condições que necessitamos impor aos mapas que descrevem medida perturbadora.

## 2.2. Teoria da medida quântica

Na mecânica estatística clássica, a impossibilidade de se fazer uma medida perfeita, que retorne um conhecimento completo sobre a configuração do sistema, é majoritariamente um desafio prático. **Mesmo para variáveis contínuas, onde qualquer resultado é uma aproximação, é sempre possível (ao menos na teoria) aumentar a precisão e se aproximar progressivamente da resposta.** Na mecânica quântica, contudo, essa impossibilidade é intrínseca à teoria. Para alguns sistemas, mesmo uma medida que retorne o máximo possível de conhecimento sobre ele ainda não vai ser determinística. **O estado de conhecimento completo ainda é probabilístico:** uma única configuração é possível, mas ela ainda é uma distribuição de probabilidades.

A explicação natural para esse dilema seria a da existência de *variáveis ocultas* [5] que mesmo não podendo ser medidas, interferem nos resultados. Essa resposta, contudo, levanta alguns desafios significativos. John Bell já mostrou em seu famoso artigo de 1964

[4] (depois de uma prova menos completa de von Neumann, ainda em 1932 [3]) que a dinâmica das distribuições de probabilidade de um sistema quântico se comporta de maneira mensuravelmente distinta da de um sistema clássico de conhecimento incompleto, produzindo distribuições de probabilidade impossíveis seguindo somente as leis da física clássica. Pela comprovação experimental dessa desigualdade, inclusive, receberam A. Aspect, J. F. Clauser e A. Zeilinger o prêmio Nobel da física de 2022 [23]. De maneira simplificada, a desigualdade de Bell — ou sua versão mais comum, a desigualdade de CHSH (sigla para J. Clauser, M. Horne, A. Shimony e R. Holt) [24] — mostra que se assumirmos, como se espera na física clássica, que essas variáveis ocultas sejam tanto locais (ou seja, não podem influenciar instantaneamente outras variáveis distantes) quanto realistas (essas variáveis existem independentemente de as estarmos medindo ou não) impõe-se limites superiores a distribuições de probabilidades que podem ser — e foram — experimentalmente violados. É necessário, deste modo, abandonar uma dessas duas hipóteses. Se se deseja preservar a suposição da existência de variáveis ocultas realistas, deve-se abandonar a localidade.

Vamos contornar, no entanto, esse vespeiro adotando uma outra perspectiva, chamada pela referência [17] de *operacional*, que é tratar a mecânica quântica como uma caixa preta, ignorando se existem ou não variáveis ocultas por trás dela. Ela, sob esse modelo, é simplesmente um algoritmo para prever as probabilidades dos resultados das medições.

Assim, o *estado quântico* corresponde ao nosso conhecimento sobre o resultado esperado de medidas do sistema. Como no caso clássico, observadores com informações diferentes sobre o sistema podem chegar a estados diferentes. A única condição é que esses estados sejam *consistentes* entre si [17]. Definamos esse termo: uma coleção de estados  $\{\rho_j\}$  é *consistente* entre si se existe um real positivo  $\epsilon$  e um estado puro  $|\psi\rangle$ <sup>3</sup> tal que

$$\sigma_j = \rho_j - \epsilon |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{é um operador positivo para todo } j. \quad (2.12)$$

Ou seja, todo estado observado  $\rho_j$  corresponde a uma mistura (no sentido quântico) entre um estado puro  $|\psi\rangle\langle\psi|$  e outro estado  $\sigma_j$ . Note que se aplicarmos aos três elementos da equação acima as propriedades que toda matriz densidade deve satisfazer — (i)  $\text{Tr}[\rho] =$

---

<sup>3</sup>Lembramos que um estado puro corresponde a um estado de conhecimento máximo sobre um determinado sistema

$1 \geq \text{Tr}[\rho^2]$  e (ii) “todo autovalor de  $\rho$  é não negativo” — quanto mais puro um dos elementos de  $\{\rho_j\}$  for, mais restrito o conjunto será. Em particular, se um  $\rho_{j'} \in \{\rho_j\}$  for puro, a condição (2.12) apenas será satisfeita se  $\sigma_{j'} \propto |\psi\rangle\langle\psi| \forall j'$ , o que implicará que  $\rho_{j'}$  é o único elemento puro da coleção  $\{\rho_j\}$ . Analogamente, dado um estado maximamente misto  $\rho_{j''} = \frac{\mathbb{I}}{d}$ , onde  $d$  é o número de dimensões do espaço de Hilbert e  $\mathbb{I}$  a sua identidade, qualquer estado puro é consistente com ele. Isso faz bastante sentido físico: estados puros contém unicamente a incerteza quântica de um sistema, enquanto estados mistos contém a incerteza clássica entre os seus estados puros. **Se temos o máximo de informação possível sobre um sistema (um estado puro), outro observador que só pode obter uma distribuição diferente em caso de maior ignorância sobre ele; já se temos o mínimo (um estado maximamente misto), não podemos afirmar nada e qualquer estado é igualmente possível.**

### 2.2.1. Medida projetiva

O exemplo mais simples de medida quântica é a **medida projetiva**: Seja uma quantidade física  $\Lambda$  associada a um operador  $\hat{\Lambda}$ . Este pode sempre ser diagonalizado em alguma base:

$$\hat{\Lambda} = \sum_{\lambda} \lambda \hat{\Pi}_{\lambda} \quad (2.13)$$

(análogo para o caso contínuo. Ainda trataremos aqui apenas do caso discreto por simplicidade, visto que medida quântica não é o foco principal dessa dissertação) onde  $\{\lambda\}$  são os autovalores de  $\hat{\Lambda}$ , todos reais.  $\hat{\Pi}_{\lambda}$  é chamado de *projetor*. Se o espectro deles não for degenerado, esses projetores serão de ranque 1, ou seja: estados puros  $|\lambda\rangle\langle\lambda|$ . Contudo, mesmo que sejam degenerados, projetores sempre satisfazem a *condição de completude*:

$$\sum_{\lambda=1}^d \hat{\Pi}_{\lambda} = \mathbb{I}_d, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbb{I}_d$  é a matriz identidade  $d \times d$ , e a *condição de ortonormalidade*:

$$\hat{\Pi}_{\lambda} \hat{\Pi}_{\lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'} \hat{\Pi}_{\lambda}. \quad (2.15)$$

Duas propriedades importantes das medidas projetivas são a probabilidade  $\wp_\lambda$  de se obter o resultado  $\lambda$  da medida e o estado condicionado  $\rho'_\lambda$  após a medição de duração  $T$ :

$$\wp_\lambda(t) = \text{Tr}[\rho(t)\hat{\Pi}_\lambda], \quad \rho'_\lambda(t+T) = \frac{\hat{\Pi}_\lambda\rho(t)\hat{\Pi}_\lambda}{\wp_\lambda(t)}, \quad (2.16)$$

isto é: o estado final é uma projeção do inicial no subespaço gerado pelo projetor  $\hat{\Pi}_\lambda$  correspondente ao resultado da medida. Este é o assim chamado *colapso* da função de onda. **A implicação mais imediata é que se o mesmo observável do sistema for medido novamente, sem dar tempo para que evolua, deve retornar o mesmo resultado  $\lambda$  (consequência da aplicação de (2.15) a (2.16)) e o estado condicionado a essa segunda medição não irá mudar com relação ao à primeira.**

Podemos agora reintroduzir o estado a-posteriori **não** condicionado, análogo quântico à equação (2.6):

$$\rho'(t+T) = \sum_\lambda \wp_\lambda \rho'_\lambda(t+T), \quad (2.17)$$

que é o estado do sistema após ser realizada uma medição cujo resultado ignoramos.  $\wp_\lambda$  e  $\rho'_\lambda$  são tais quais definidos na equação (2.16).

Note que estamos necessariamente introduzindo incerteza clássica no sistema, portanto, apesar do traço ser preservado, a *pureza*  $\text{Tr}[\rho^2]$  é em geral menor do que a do estado anterior à medição (inclusive, se  $\rho$  for puro,  $\rho'$  será misto, exceto se  $\rho = \hat{\Pi}_\lambda$  para algum  $\lambda$ ), pois

$$\begin{aligned} \rho'(t+T) &= \sum_\lambda \wp_\lambda \rho'_\lambda(t+T) = \sum_\lambda \hat{\Pi}_\lambda \rho(t) \hat{\Pi}_\lambda \\ \implies \text{Tr}[(\rho')^2] &= \text{Tr} \left[ \left( \sum_\lambda \hat{\Pi}_\lambda \rho \hat{\Pi}_\lambda \right)^2 \right] \stackrel{(i)}{=} \text{Tr} [\hat{\Pi}_\lambda \rho^2] \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} \underbrace{\text{Tr} [\hat{\Pi}_\lambda]}_{=1} \text{Tr} [\rho^2] = \text{Tr} [\rho^2], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde em (i) usamos a ortonormalidade dos projetores e a ciclicidade do traço e em (ii) a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Ou seja: a evolução não condicionada por medida projetiva, diferentemente das evo-**

luções unitárias descritas pela equação de Schrödinger, é em geral um processo que *umenta a entropia de um sistema* (mantendo-a igual apenas se o estado do sistema for autoestado de um dos projetores)!<sup>4</sup> Isso é muito significativo, pois comprova que o estado a-posteriori não condicional é em geral objetivamente distinto do estado a-priori: toda medida quântica necessariamente provoca uma *back-action* no sistema.

Outro aspecto importante de se recordar é o de *medidas simultâneas*: para saber se duas quantidades  $A$  e  $B$  podem ser medidas simultaneamente, basta provar que aplicando-nas sucessivamente sem que o sistema evolua entre ambas, obtém-se o mesmo resultado independente da ordem:

$$\hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b |\psi\rangle = e^{i\theta} \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a |\psi\rangle \iff [\hat{\Pi}_a, \hat{\Pi}_b] = 0 \quad \forall a, b, \quad (2.19)$$

*i.e.*  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ , ou seja, existe uma base  $\{|\phi\rangle\}$  que diagonaliza ambas simultaneamente.

### 2.2.2. Medida generalizada: aparato de medição e estados mistos

Apesar do exposto acima, medidas projetivas não descrevem todos os tipos de medidas possíveis. A primeira evidência disso é que muito facilmente conseguimos encontrar um contraexemplo para a condição de ortonormalidade, pois ela na prática impõe que se a medição for repetida imediatamente, sem dar tempo para o sistema evoluir, o estado condicionado a-posteriori de ambas deve ser o mesmo. Analisemos o seguinte aparato: seja um detector que conta os fótons emitidos por um sistema (sistema este que não consegue recuperar energia do ambiente); se ele fez duas medições com resultado igual, “1 fóton absorvido pelo detector”, o estado condicionado do sistema após ambas é necessariamente diferente, pois após a segunda medição ele está menos excitado que após a primeira. Esse detector não pode ser descrito utilizando medida projetiva. Temos, portanto, que encontrar alguma definição mais generalizada de medida quântica que abranja, por exemplo, medidas destrutivas como a descrita acima — e ela é possível pois, na prática, como descrito no começo da seção 2.1.1, na mecânica quântica é raro uma medição ser feita diretamente no sistema sendo estudado. No geral, o que temos é um segundo

---

<sup>4</sup>No caso, a entropia de von Neumann:  $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \ln \rho]$ , que é mínima quando o estado é puro e máxima quando o estado é maximamente misto. Note, no entanto, que a evolução *condicionada* tipicamente *diminui* a entropia do sistema, mantendo-a igual, também, apenas quando o estado do sistema é autoestado do projetor.

sistema quântico, que chamaremos de *aparato*, que durante o ato da medição é condicionado ao sistema que desejamos estudar. Assim, se o sistema no instante inicial, antes da medição, for descrito pelo vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  e o aparato por  $|\theta(t)\rangle$ , o estado do sistema combinado será

$$|\Psi(t)\rangle = |\theta(t)\rangle \otimes |\psi(t)\rangle, \quad (2.20)$$

onde  $\otimes$  é o produto tensorial (que será omitido quando possível daqui em diante). Note que as suas duas componentes ainda não estão emaranhadas.

A medida projetiva será realizada no aparato, mas a maneira como ela se manifestará para o sistema não necessariamente será projetiva. Mais precisamente, veremos a seguir que um operador de medida no subespaço de Hilbert do sistema não precisará satisfazer a condição de ortonormalidade mas apenas a de completude (o que faz sentido: esperamos ao menos que a soma das probabilidades de se obter algum resultado, qualquer que seja, seja 1). Se olharmos apenas para o subespaço do sistema, os efeitos da medição são como uma interação com o ambiente. O sistema quântico é *aberto*, portanto. Essa é uma das múltiplas pontes que traçaremos no próximo capítulo com a teoria para sistemas quânticos abertos.

Temos que começar introduzindo um operador de evolução temporal que emaranhe o sistema ao aparato  $\hat{U}(t + T_1, t)$ , ou, por simplicidade, apenas  $\hat{U}(T_1)$ , que age no sistema combinado durante um intervalo de tempo  $T_1$ . Assim, (2.20) evolui para

$$|\Psi(t + T_1)\rangle = \hat{U}(T_1) |\theta(t)\rangle |\psi(t)\rangle, \quad (2.21)$$

que não pode mais por construção ser fatorizado em dois subespaços.

Em seguida, realizamos uma medida projetiva ao longo de um intervalo de tempo  $T_2$ , curto o suficiente para que a ação de  $\hat{U}(T_2)$  seja insignificante. Como a princípio podemos escolher as propriedades do aparato<sup>5</sup>, seja o projetor no subespaço de Hilbert dele de ranque 1  $\hat{\pi}_r = |r\rangle\langle r|$ , que retorna o valor  $r$  para o observável (a variável)  $R$ . Assim, o operador de medição no espaço do sistema combinado é  $\hat{\Pi}_r = \hat{\pi}_r \otimes \hat{1}_S$ , onde

---

<sup>5</sup>O que não implica que não existam escolhas mais ou menos adequadas para a base de aparato. O estado a-posteriori não condicionado (2.17) é independente da escolha de bases, mas o condicionado depende diretamente dela. Escolhas inadequadas de base podem apenas introduzir ruído sem extrair nenhuma informação do sistema. Não elaboraremos muito sobre o assunto pois não virá a ser necessário, para mais informações sobre o tema, consultar as seções 1.2.6 e 1.3 da referência [17].



$\hat{1}_S$  é o operador identidade do subespaço do sistema. Deste modo, para  $T = T_1 + T_2$ , o estado combinado após a medição é:

$$|\Psi_r(t + T)\rangle = \frac{\hat{\Pi}_r}{\sqrt{\wp_r}} \hat{U}(T_1) |\theta(t)\rangle |\psi(t)\rangle = \frac{|r\rangle \langle r| \hat{U}(T_1) |\theta(t)\rangle |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\wp_r}}. \quad (2.22)$$

Se olharmos com atenção para a equação acima, vemos que estamos tirando o traço parcial do operador  $\hat{U}(T_1)$  no subespaço do aparato. Chamemos esse novo operador, que atua apenas no subespaço do sistema, de **operador de medição generalizado**, ou apenas operador de medição:

$$\hat{M}_r = \langle r| \hat{U}(T_1) |\theta(t)\rangle. \quad (2.23)$$

Assim, note que (2.22) agora é separável, e pode ser reescrita como

$$|\Psi_r(t + T)\rangle = |r\rangle \otimes \frac{\hat{M}_r |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\wp_r}}, \quad (2.24)$$

a probabilidade de se obter  $R = r$  é

$$\wp_r = \langle r|r\rangle \langle \psi(t)| \hat{M}_r^\dagger \hat{M}_r |\psi(t)\rangle = \langle \psi(t)| \hat{M}_r^\dagger \hat{M}_r |\psi(t)\rangle, \quad (2.25)$$

e, como é separável, podemos reescrever (2.24) apenas no subespaço do sistema. Deste modo, o estado condicionado do sistema, dado que o observável  $R$  tem o valor  $r$ , após uma medição de duração  $T$  é

$$|\psi'_r(t + T)\rangle = \frac{\hat{M}_r |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\wp_r}}. \quad (2.26)$$

Podemos, além disso, construir um outro operador, chamado de *efeito* ou *operador de probabilidade*:

$$\hat{E}_r = \hat{M}_r^\dagger \hat{M}_r, \quad (2.27)$$

que deve, assim como (2.10), satisfazer unicamente a condição de completude  $\sum_r \hat{E}_r = \hat{1}_S$ . O conjunto de todos os operadores de probabilidade  $\{\hat{E}_r : r\}$  compõe o que é chamado de medida com operador positivo valorizado, mais conhecido pela sigla em inglês **POVM**, do espaço de resultados  $r$  [9, 17]. Aqui, nesse modelo, o POVM entra no lugar

antes ocupado pela distribuição de probabilidade. Os resultados  $r$  não são, como na mecânica quântica estudada no bacharelado, os autovalores de um observável Hermitiano, mas um rótulo que indica algum dos possíveis resultados da medição.

Para generalizar esses conceitos para a notação de matriz densidade, basta definir **superoperador**. Um superoperador  $\mathcal{S}$  é um operador que leva operadores a operadores em um espaço de Hilbert. Para que represente um processo físicos,  $\mathcal{S}$  deve satisfazer [17]:

- i. Preservar ou diminuir o traço:  $0 \leq \text{Tr}[\mathcal{S}\rho] \leq 1$  para todo  $\rho$ , onde  $\text{Tr}[\mathcal{S}\rho]$  é a probabilidade do processo  $\mathcal{S}$  acontecer;
- ii.  $\mathcal{S}$  é um mapa linear convexo, ou seja, para probabilidades  $\wp_j$ , satisfaz  $\mathcal{S} \sum_j \wp_j \rho_j = \sum_j \wp_j \mathcal{S}\rho_j$ ;
- iii.  $\mathcal{S}$  é completamente positivo: o mapa  $\mathcal{S}$  é *positivo* se levar qualquer operador positivo  $\rho \in \mathcal{H}$  a outro operador positivo  $\mathcal{S}\rho \in \mathcal{H}$ . Agora, é *completamente* positivo se o superoperador combinado  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{S}$ , para  $\mathcal{I}$  o superoperador de identidade de outro espaço de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$  qualquer, for um mapa que leva um operador positivo  $\rho \in \tilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H}$  a um operador positivo  $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{S})\rho \in \tilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H}$ .<sup>6</sup>

Mapas desse tipo são chamados de *Completamente Positivos e Preservadores de Traço*, mais conhecidos pela sigla em inglês **CPTP** [9, 17]. Se o superoperador satisfaz essas três condições, é chamado também de *operação quântica* ou *canal quântico* e pode ser descrito na representação de Kraus [26]:

$$\mathcal{S}(\rho) = \sum_j \hat{K}_j \rho \hat{K}_j^\dagger, \quad (2.28)$$

para algum conjunto de operadores que satisfazem

$$\sum_j \hat{K}_j^\dagger \hat{K}_j \leq \hat{1}. \quad (2.29)$$

---

<sup>6</sup>A motivação para essa condição mais restrita, como já argumenta Lindblad [25], é que suponha que temos dois sistemas  $S_f$  e  $S_a$ , o primeiro fechado e o segundo aberto. Se impusermos apenas positividade, não termos como garantir que um superoperador  $\mathcal{S}$  da interação com o ambiente com o sistema combinado  $S_f + S_a$  agindo positivamente em  $S_a$  não influirá também em  $S_f$  (o que seria um absurdo, dado que  $S_f$  é por construção fechado). Agora, se o superoperador for *completamente* positivo, sempre será possível construí-lo tal que seja  $\mathcal{S} = \mathcal{I}_f \otimes \mathcal{S}_a$  com  $\mathcal{S}_a$  positivo.

Em linguagem coloquial, superoperadores de processos físicos “*sanduícham*” operadores. Deste ponto em diante, empregaremos a seguinte notação: para quaisquer operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ,

$$\boxed{\mathcal{J}[\hat{A}]\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{A}^\dagger.} \quad (2.30)$$

Uma prova formal da representação de Krauss pode ser encontrada na seção 4.2.3 de [19].

Note agora que os operadores de medição  $\{\hat{M}_r\}$  satisfazem a condição (2.29) lembrando de sua definição na equação (2.23):

$$\sum_r \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j = \sum_r \langle \theta | \hat{U}^\dagger |r\rangle \langle r| \hat{U} | \theta \rangle = \langle \theta | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \theta \rangle = \langle \theta | \hat{1} | \theta \rangle = \hat{1}_S, \quad (2.31)$$

onde salientamos que, como  $|r\rangle$  e  $|\theta\rangle$  são vetores no subespaço do ambiente,  $\hat{1}_S$  é o operador identidade do subespaço do sistema, enquanto  $\hat{1}$  é o operador identidade do espaço do sistema combinado. Portanto podemos definir o superoperador  $\mathcal{O}_r = \mathcal{J}[\hat{M}_r]$ , um CPTP, análogo quântico ao (2.8), que age na matriz densidade realizando uma medição de  $R$  que devolve o resultado  $r$ . O seu correspondente não condicionado, onde se ignora o resultado, será:

$$\rho'(t+T) = \sum_r \wp_r \rho'_r(t+T) = \sum_r \mathcal{O}_r \rho(t) \equiv \mathcal{O} \rho(t). \quad (2.32)$$

Por fim, fazemos uma última generalização para sistemas descritos por **estados mistos**, de modo a poder levar em consideração tanto a medição de estados não puros, quanto *medidas ineficientes*, ou seja, medidas que não preservam a pureza do estado a-posteriori condicionado pois os seus operadores de medição são degenerados. Para tanto, não conseguimos mais utilizar  $\hat{M}_r$  mas sim o conjunto degenerado  $\{\hat{\Omega}_{r,j} : j\}$  de operadores que, apesar de distintos, não somos capazes de diferenciar por conta da *ineficiência* de nossa medição, devolvendo o resultado  $r$  para todo  $j$ . Devemos, portanto, sempre somar o resultado sobre os  $j$ s, pois não sabemos qual  $\hat{\Omega}_{r,j}$  em particular realizou a medição.

De forma mais precisa, lembremos de como construímos  $\hat{M}_r$ : assumimos que o estado do aparato  $|\theta(t)\rangle$  na equação (2.20) é puro. Se redefinirmos o sistema combinado (2.22) com um estado misto do aparato:  $\rho = \rho_A \otimes \rho_S$ , onde  $\rho_A = \sum_j q_j |j\rangle \langle j|$ , teremos, análogo

a na equação (2.23) (omitiremos a dependência no tempo por simplicidade):

$$\rho'_{Sr} = \text{Tr} \left[ \hat{U} (\rho_A \otimes \rho_S) \hat{U}^\dagger \right] = \sum_j q_j \langle r | \hat{U} | j \rangle \rho_S \langle j | \hat{U}^\dagger | r \rangle \quad (2.33)$$

$$\hat{\Omega}_{r,j} \equiv \sqrt{q_j} \langle r | \hat{U} | j \rangle \Rightarrow \rho'_{Sr} = \sum_j \hat{\Omega}_{r,j} \rho_S \hat{\Omega}_{r,j}^\dagger. \quad (2.34)$$

E assim, podemos reescrever a operação  $\mathcal{O}_r$  como

$$\mathcal{O}_r = \sum_j \mathcal{J}[\hat{\Omega}_{r,j}], \quad (2.35)$$

que leva um estado a-priori  $\rho$  do sistema a um estado condicionado a-posteriori:

$$\rho'_r(t+T) = \frac{\mathcal{O}_r \rho(t)}{\wp_r}, \quad (2.36)$$

onde  $\wp_r = \text{Tr}[\mathcal{O}_r \rho(t)] = \text{Tr}[\hat{E}_r \rho(t)]$ ,  $\hat{E}_r = \sum_j \hat{\Omega}_{r,j}^\dagger \hat{\Omega}_{r,j}$  os operadores de probabilidade análogos a (2.27), que satisfazem a condição de completude. Aqui, a operação não condicionada pode ser reescrita como  $\mathcal{O} = \sum_{r,j} \mathcal{J}[\hat{\Omega}_{r,j}]$  e, portanto, recuperando a notação completa e geral de (2.21), a equação (2.32) vira:

$$\mathcal{O} \rho \equiv \text{Tr}_A[\hat{U}(T_1)(\rho \otimes \rho_A)\hat{U}^\dagger(T_1)], \quad (2.37)$$

onde lembramos que  $\rho$  é a matriz densidade só do sistema.

Estas equações são as análogas quânticas às apresentadas na seção 2.1.2.

# 3

## Sistemas quânticos abertos

O leitor familiarizado com a mecânica quântica a essa altura deve estar estranhando que resultados como as operações quânticas descritas pela equação (2.28) se assemelham muito à representação de Schrödinger da evolução temporal. Os operadores de evolução  $\hat{U}(t)$  até satisfazem uma condição muito parecida à imposta a  $\hat{M}_j$ , a da unitariedade:

$$\text{Evolução temporal:} \quad \rho(t+T) = \hat{U}(T)\rho(t)\hat{U}(T)^\dagger, \quad \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1 \quad (3.1)$$

$$\text{Operação quântica:} \quad \rho' = \sum_j \hat{M}_j \rho \hat{M}_j^\dagger, \quad \sum_j \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j = 1 \quad (3.2)$$

As evoluções descritas no capítulo anterior, no entanto, não necessariamente são contínuas — e portanto não satisfazem a equação de Schrödinger!

Mas não há contradição alguma. Um estado condicionado como os descritos no capítulo 2 está, justamente, condicionado ao resultado de uma medição — e esse resultado é externo ao sistema. A equação de Schrödinger que estudamos nos cursos de mecânica quântica tem o pressuposto que o estado do sistema não está correlacionado a nada exterior a ele; em outras palavras, que o sistema é *fechado* [17].

Um sistema descrito por matrizes densidade condicionadas não pode ser modelado seguindo as regras já conhecidas de mecânica quântica para sistemas fechados, devemos concluir. Não só ele, mas na verdade qualquer sistema no mundo real sempre inevitavelmente interage com o ambiente, e dessa interação resulta o fenômeno de *decoerência*, em que as combinações descritas por superposições quânticas progressivamente se convertem

em simples misturas clássicas, ou seja: o sistema perde irreversivelmente suas qualidades exclusivamente quânticas, mas trataremos mais disso depois. De todo modo, a teoria quântica de sistemas fechados claramente é insuficiente, precisamos de uma teoria mais geral para sistemas abertos. É desta teoria que tratará este capítulo.

Utilizamos como referências principais para o capítulo a seguir as notas de aula do professor Gabriel T. Landi para o curso *Quantum Information and Quantum Noise* [27], os livros *Quantum Computation and Quantum Information* [9], de Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang, *Stochastic Processes for Physicists* [28], de Kurt Jacobs, além de, novamente, *The Theory of Open Quantum Systems* [19], de Heinz-P. Breuer e Francesco Petruccione, e *Quantum Measurement and Control* [17], de Howard M. Wiseman e Gerard J. Milburn.

A dedução da equação mestra quântica feita na seção 3.3 não é estritamente necessária para a compreensão da dinâmica que simularemos nos próximos capítulos, e o leitor bem familiarizado com a teoria de sistemas quânticos abertos pode se sentir livre a pulá-la, assim como a discussão sobre modelo colisional na seção 3.4. Acrescentei-as porque justificam fisicamente todas as aproximações e imposições que tem que ser feitas no modelo, e o leitor que não entenda plenamente a todos os passos que nos levam à equação de Lindblad (3.62) pode falsamente julgar que os modelos das simulações do capítulo 5 e 7 e suas respectivas equações de movimento são muito mais arbitrários do que de fato são.

### 3.1. Uma ponte entre medida generalizada e sistemas abertos

Começamos retomando algumas ideias que não foram suficientemente exploradas no capítulo anterior. Lembremos novamente da definição (2.23):  $\hat{M}_r = \langle r | \hat{U} | \theta \rangle$ , onde  $\{|r\rangle\}$  é uma base ortonormal do subespaço de Hilbert do ambiente  $A$ ,  $|\theta\rangle$  é o estado inicial do aparato e  $\hat{U}$  é uma unitária no espaço de Hilbert do sistema combinado  $A \otimes S$ . Toda medida generalizada (ou seja, que satisfaz (3.2)) pode ser escrita dessa maneira? São todas as medidas generalizadas apenas a marginalização de uma unitária em um espaço maior?

A resposta é sim. É possível demonstrar que toda operação quântica (e, em particular, que toda medida generalizada) em um espaço  $S$  pode ser descrita como uma evolução

unitária em um espaço de dimensão maior  $A \otimes S$  seguida de uma medida projetiva em  $A$ , onde  $\dim(A)$  não precisa ser maior do que  $\dim(S)$ . Essa propriedade se chama *dilatação de Stinespring* [27], cujo rascunho da prova será apresentado logo adiante.

Antes, é necessário mencionar que dada essa unitária  $\hat{U}$ , a escolha de  $\{\hat{M}_r\}$  não é única, pois a escolha da base  $\{|r\rangle\}$  de  $A$  não é única. Podemos escolher qualquer outra base  $\{|k\rangle\}$  sobre  $A$  e construir operadores  $\hat{N}_k = \langle k | \hat{U} | \theta \rangle$ , contudo, como mencionado na nota de rodapé 5 do capítulo anterior, frequentemente existe uma escolha ótima de base projetiva, que constrói operadores de medição que extraem o máximo de informação do sistema, assim como é possível fazer outra escolha de bases que constrói operadores que não nos dizem absolutamente nada. O conjunto dos operadores construídos com essas escolhas de base são chamados de **unravellings** da operação quântica [17]. Mas a operação em si é a mesma:

$$\sum_r \hat{M}_r \rho_S \hat{M}_r^\dagger = \sum_k \hat{N}_k \rho_S \hat{N}_k^\dagger, \quad \text{para quaisquer escolhas de bases } \{|r\rangle\} \text{ e } \{|k\rangle\} \text{ de } A. \quad (3.3)$$

Em outras palavras, o estado a-posteriori não condicionado é o mesmo, *i.e.* se medirmos o sistema com dois conjunto de operadores de medição diferentes mas ignorarmos o resultado de ambas as medições, o estado final deve ser o mesmo — pois a nossa ignorância é a mesma — desde que ambos os conjuntos derivem de uma mesma unitária no sistema combinado e estado inicial do aparato.

Para provar essa propriedade [9], precisamos primeiro lembrar que duas bases  $\{|r\rangle\}$  e  $\{|k\rangle\}$  geram um mesmo operador se e somente se existe uma matriz unitária complexa  $U_{rk}$  tal que  $|r\rangle = \sum_k U_{rk} |k\rangle$ <sup>1</sup>. Lembrando que as bases do aparato  $\{|r\rangle\}$  e  $\{|k\rangle\}$  respeitam a propriedade acima e que o grupo das matrizes unitárias é fechado, está provada a propriedade (3.3).

Para provar o outro lado, que sempre é possível achar um conjunto alternativo de

---

<sup>1</sup>A prova desta afirmação, por sua vez, é muito simples: primeiro, vamos redefinir as bases usando subíndices:  $\{|\phi_k\rangle\}$  e  $\{|\psi_r\rangle\}$ ; em seguida, basta lembrar que qualquer operador  $\hat{A}$  será escrito em uma dessas bases como  $\hat{A} = \sum_r a_r |\psi_r\rangle\langle\psi_r|$ , e para todo  $r$  natural,

$$\sum_r |\psi_r\rangle\langle\psi_r| = \sum_r \left( \sum_k U_{rk} |\phi_k\rangle \right) \left( \sum_l \langle\phi_l| U_{rl}^\dagger \right) = \sum_{k,l} \underbrace{\left( \sum_r U_{rk} U_{rl}^\dagger \right)}_{\delta_{kl}} |\phi_k\rangle \langle\phi_l| = \sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|.$$

operadores  $\{\hat{N}_k\}$  que descrevem a mesma operação  $\sum_r \hat{M}_r \rho_S \hat{M}_r^\dagger$ , basta usar o mesmo argumento e definir

$$|r\rangle = \sum_k \hat{u}_{rk}^A |k\rangle \Rightarrow$$

$$\hat{M}_r = \langle \theta | \hat{U} |r\rangle = \langle \theta | \hat{U} \left( \sum_k \hat{u}_{rk}^A |k\rangle \right) = \sum_k \langle \theta | \underbrace{\hat{U} \hat{u}_{rk}^A}_{\equiv \hat{U}'} |k\rangle \equiv \sum_k \hat{N}_k.$$

Agora, construamos duas bases (não normalizadas) para o sistema combinado  $\{|e_r\rangle\}$  e  $\{|f_k\rangle\}$  a partir de uma base ortogonal gerada pelos vetores  $|i\rangle = |i_A\rangle \otimes |i_S\rangle$ :

$$|e_r\rangle \equiv \sum_i |i_A\rangle \otimes \hat{M}_r |i_S\rangle, \quad |f_k\rangle \equiv \sum_i |i_A\rangle \otimes \hat{N}_k |i_S\rangle.$$

Supondo que ambos os operadores descrevem a mesma operação quântica, então necessariamente  $\sum_r |e_r\rangle \langle e_r| = \sum_k |f_k\rangle \langle f_k|$ , e a propriedade acima garante que existe uma  $\hat{U}_{rk}$  tal que  $|e_r\rangle = \sum_k \hat{U}_{rk} |f_k\rangle$ . Tirando o traço no subespaço do aparato:

$$\sum_i \hat{M}_r |i_S\rangle = \sum_k \hat{U}_{rk} \left( \sum_i \hat{N}_k |i_S\rangle \right) \Rightarrow \hat{M}_r = \sum_k \hat{U}_{rk} \hat{N}_k.$$

Podemos trivialmente usar o mesmo raciocínio de trás para frente para demonstrar que se existe essa unitária que transforma um operador  $\hat{M}_r$  em outro  $\hat{N}_k$ , então eles descrevem a mesma operação quântica.

Voltaremos a nos debruçar sobre o tema de *unravelling* quântico nos próximos capítulos, quando tratarmos das simulações numéricas.

Por fim, por completude, apresentemos apenas uma introdução à dilatação de Stinespring: toda operação quântica  $\mathcal{S}$  dada por um conjunto de operadores de Kraus  $\{E_k\}$  em um espaço de Hilbert de  $n$  dimensões pode ser descrito como uma medida projetiva sobre uma evolução unitária em um espaço de Hilbert de não mais que  $n^2$  dimensões:

$$\mathcal{S}(\rho) = \text{Tr}_A \left[ U(\rho \otimes |\psi\rangle \langle \psi|_A) U^\dagger \right] = \sum_{k=1}^{mn} E_k \rho E_k^\dagger,$$

onde  $A$  é o espaço “auxiliar” (geralmente chamado “do ambiente”), de dimensão  $m \leq n$ , e  $|\psi\rangle$  é um estado puro qualquer nele.  $U$  é uma unitária no espaço combinado de  $n \times m$



dimensões. A demonstração desse teorema não é muito difícil, mas foge do escopo desse trabalho. Pode ser encontrada na seção 8.2.4 de [9].

As conclusões podem ser resumidas em duas ideias (ou melhor: duas perspectivas sobre a mesma ideia): por um lado, os postulados da mecânica quântica não foram violados quando introduzimos operadores de medida generalizados — no fundo eles não passam de projetores em espaços que só podem ser parcialmente acessados; por outro, uma realização prática: é muitíssimo raro que possamos acessar o espaço de qualquer sistema como um todo, a menor interação com o mundo exterior produz correlações muito além da nossa capacidade de medi-las. As equações de movimento “normais” da mecânica quântica serão inadequadas nesses casos. Esse problema será enfrentado daqui a pouco, na seção 3.3.

## 3.2. Processos Markovianos

### 3.2.1. Processos Markovianos clássicos

Façamos um breve retorno à física clássica.

Um **processo estocástico** é uma variável aleatória (como definido em (2.1)) cujas propriedades estatísticas variam no tempo  $X(t)$ . Ou seja, é um mapa  $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\Omega$  o espaço amostral e  $T$  intervalo de tempo. Fixando um  $\omega \in \Omega$ , chamamos  $\{X(\omega, t), t \in T\}$  de *caminho amostral* ou *realização da trajetória*.

Um **processo Markoviano** [19] é um processo estocástico com memória curta. Para  $t_1 < t_2 < \dots < t_m \in T$  e  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \Pr\left(X(t_m) \mid X(t_{m-1}) = x_{m-1}, X(t_{m-2}) = x_{m-2}, \dots, X(t_1) = x_1\right) \\ = \Pr\left(X(t_m) \mid X(t_{m-1}) = x_{m-1}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ou seja, o estado atual depende apenas do estado imediatamente anterior. Essa é chamada da *condição de Markov*.

Seja  $\wp_m(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)$  a densidade de probabilidade de a variável aleatória assumir a realização  $x_1$  no instante  $t_1$ ,  $x_2$  no instante  $t_2$ , até  $x_m$  no instante  $t_m$ . A *densidade de*

probabilidade condicional é dada por

$$\wp_{k|m}\left(x_{m+k}, t_{m+k}; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} \mid x_m, t_m; \dots; x_1, t_1\right) \equiv \frac{\wp_{m+k}\left(x_{m+k}, t_{m+k}; \dots; x_{m+1}, t_{m+1}\right)}{\wp_m\left(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1\right)}. \quad (3.5)$$

Lembramos que  $\wp_{k|m}$  significa a densidade de probabilidade que podemos estimar para os próximos  $k$  passos dado que conhecemos os  $m$  passos anteriores. Podemos reescrever a condição de Markov (3.4) em termos de da densidade de probabilidade condicional:

$$\wp_{1|m}\left(x_{m+1}, t_{m+1} \mid x_m, t_m; \dots; x_1, t_1\right) = \wp_{1|1}\left(x_{m+1}, t_{m+1} \mid x_m, t_m\right) \quad (3.6)$$

A *probabilidade condicional de transição*  $\wp_{1|1}(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)$  é, para qualquer processo estocástico (não necessariamente Markoviano), a densidade de probabilidade que uma variável assuma o valor  $x_2$  no momento  $t_2$  dado que assumiu o valor  $x_1$  em um momento anterior  $t_1$ . Ou seja, pode ser chamado de **propagador**:

$$T(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) \equiv \wp_{1|1}(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) \quad (3.7)$$

e deve satisfazer

$$\int dx T(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) = 1, \quad (3.8)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} T(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) = \begin{cases} \delta(x_2 - x_1), & \text{se espaço contínuo,} \\ \delta_{x_2, x_1}, & \text{se espaço discreto.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Ou seja: (3.8) garante que em todo instante  $t$  a variável assume algum valor; (3.9) garante que a evolução dessa variável aleatória é contínua.

O propagador pode ser simplificado mais ainda caso o processo Markoviano seja *homogêneo*, *i.e.* não depende de  $t_1$  ou  $t_2$  em si, mas da diferença  $\tau = t_2 - t_1$ . Neste caso apenas escrevemos  $T_\tau(x_2 \mid x_1)$ .

Assim, a densidade de probabilidade de um valor  $x_2$  em um instante  $t_2$  é:

$$\wp_1(x_2, t_2) = \int dx_1 T(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) \wp_1(x_1, t_1). \quad (3.10)$$

Isso simplifica muito as nossas contas, pois basta que se conheça a densidade de probabilidade inicial e o propagador entre os dois pontos para que se encontre a densidade de probabilidade final. O percurso que a variável faz entre os  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  é irrelevante.

Para demonstrar isso, considere três tempos  $t_1 < t_2 < t_3$  e relembre a equação (3.5):

$$\begin{aligned} \wp_3(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) &= \wp_{1|2}(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) \wp_2(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \wp_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) \wp_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) \wp_1(x_1, t_1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mas qual é a dependência da densidade de probabilidade no ponto  $(x_3, t_3)$  dado apenas  $(x_1, t_1)$ , indiferente de em que ponto  $x_2$  em particular a variável se encontrava no instante  $t_2$ ?

Para remover a dependência em  $x_2$ , devemos marginalizá-lo:

$$\wp_3(x_3, t_3; x_1, t_1) = \wp_1(x_1, t_1) \int dx_2 \wp_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) \wp_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1). \quad (3.12)$$

Se recordarmos a definição do propagador (3.7) e da densidade de probabilidade condicional, podemos reescrever a equação acima como

$$T(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 T(x_3, t_3 | x_2, t_2) T(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (3.13)$$

que é conhecida como a **equação de Chapman-Kolmogorov** [19] (ver representação na figura 3.1). Ou seja, em geral, se conhecemos o propagador para cada  $t_i$  e queremos descobrir a densidade de probabilidade em um instante posterior  $t_n$ :

$$\wp_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \wp_1(x_1, t_1) \prod_{i=1}^{n-1} T(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i) \quad (3.14)$$

para tempo ordenado:  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .

Esse resultado é extremamente útil, pois reduz enormemente o tamanho dos operadores com os quais temos que trabalhar: em vez de termos um propagador extremamente complicado que depende de  $2n$  variáveis, o que temos é apenas a multiplicação de  $n$  propagadores que dependem de 2 variáveis (mais para frente, no capítulo 4.3, apresentaremos um exemplo em que uma matriz  $4n \times 4n$  se reduz a  $n$  matrizes  $4 \times 4$ ), acelerando muito

o cálculo numérico de seu valor.

Note, por exemplo, que para processos homogêneos, que dependem apenas de  $t_2 - t_1 \equiv \tau$ , a equação de Chapman-Kolmogorov (3.13) pode ser reescrita como:

$$T_{\tau_1+\tau_2}(x_3|x_1) = \int dx_2 T_{\tau_1}(x_3|x_2) T_{\tau_2}(x_2|x_1) \quad \tau_1, \tau_2 \geq 0. \quad (3.15)$$

### 3.2.2. Processos Markovianos quânticos

Por fim, é interessante encontrar uma forma diferencial para a equação de Chapman-Kolmogorov. Como todas as transformações quânticas são lineares, sabemos que o propagador que nos interessa também o deve ser:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \mathcal{A}(t) T(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{A}$  é um operador linear que gera translações infinitesimais no tempo e é definido caso-a-caso em função da matriz densidade:

$$\mathcal{A}(t)\rho = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int dy T(x, t + \tau | y, t) \rho(y) - \rho(x)}{\tau}. \quad (3.17)$$

Para processos de Markov homogêneos  $\mathcal{A}$  perde sua dependência em  $t$  e passa apenas a depender de  $\tau$ . Nestes casos, se conhecermos  $\mathcal{A}$ , podemos imediatamente encontrar

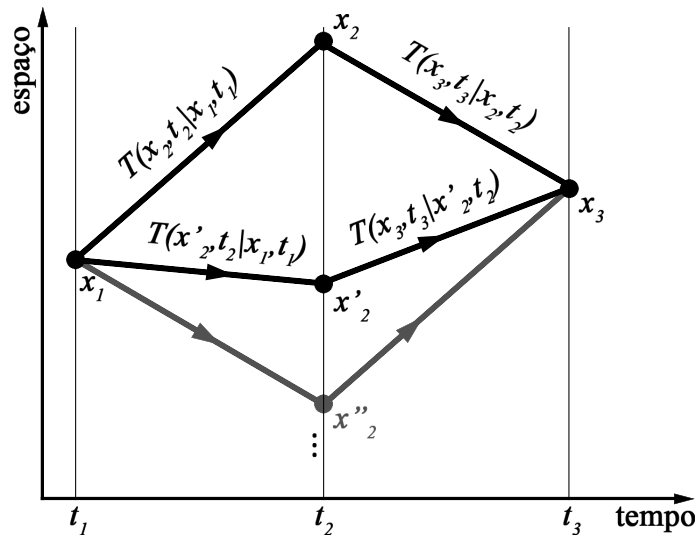


Figura 3.1: Ilustração da equação de Chapman-Kolmogorov. Marginalizando sobre todos os possíveis  $x_2$ , obtemos o propagador de  $x_1$  a  $x_3$ .

qualquer propagador pela simples solução da EDO (3.16), usando a condição (3.9):

$$T_\tau(x|y) = e^{tA}\delta(x - y), \quad \tau \geq 0. \quad (3.18)$$

Note que (3.18) satisfaz a equação (3.15).

Essa condição final  $\tau \geq 0$ , contudo, implica que a família de propagadores  $\{T_\tau | \tau \geq 0\}$  não pode formar um grupo, pois não possui inverso. É o que é chamado de **semigrupo dinâmico** [19, 25, 29]. A justificativa física da ausência de inverso é que processos estocásticos são, em geral, *irreversíveis*. Não existe nenhuma transformação física determinística que retorne o sistema ao estado inicial. O que isso implica, por outro lado, é que nem sempre é possível encontrar as densidades de probabilidade  $\wp(x, t_1)$  que evoluíram para  $\wp(x, t_2)$ ,  $t_1 < t_2$ , para todo  $\wp(x, t_2)$ . Um exemplo típico disso é quando o sistema como um todo evolui para um estado estacionário  $\bar{\wp}(x)$ . Como todo estado  $\wp(x, t)$  é tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty^+} \wp(x, t) = \bar{\wp}(x)$ , se encontrarmos o sistema no estado estacionário, é impossível saber onde ele começou.

Vejamos agora como esse tipo de processo se comporta na mecânica quântica.

### 3.3. Equação mestra quântica

“Equação mestra”, na mecânica estatística, é uma função que descreve a evolução temporal de um sistema físico em contato com o ambiente em termos da evolução das probabilidades de ocupação de diferentes estados. Ela dá a evolução no tempo da distribuição de probabilidade de um sistema. A mecânica quântica, como já foi discutido aqui, é inerentemente probabilística — o que diferencia uma equação mestra *quântica* tanto da *equação de Schrödinger*

$$\frac{d\psi}{dt} = -i\hat{H}\psi, \quad (3.19)$$

quanto da mais geral *equação de von Neumann*

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\hat{H}, \rho] \quad (3.20)$$

é que ambas não introduzem incerteza *clássica* ao sistema. Um estado puro permanece puro após qualquer evolução unitária descrita por qualquer uma das duas. Transformações

unitárias descrevem apenas evoluções *reversíveis*. Não podem ser empregadas, portanto, nem para a evolução do sistema em função da ação de um operador de medida generalizada, nem para a evolução provocada pela absorção ou emissão de energia do ambiente pelo sistema.

O que precisamos encontrar é uma solução para um processo quântico *estocástico*.

Começemos introduzindo um termo a mais na equação de von Neumann<sup>2</sup>, que chamaremos de **dissipador**  $\mathcal{D}(\rho)$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\hat{H}, \rho] + \mathcal{D}(\rho). \quad (3.21)$$

Esse novo termo deve incluir toda evolução não-unitária, de modo que qualquer dinâmica CPTP possa ser descrita com a equação acima.

Para encontrarmos a forma de  $\mathcal{D}(\rho)$ , primeiro definamos o superoperador chamado **Liouvilliano**:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho). \quad (3.22)$$

Se  $\mathcal{L}$  fosse uma matriz, a solução da equação acima seria simples: se  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , então  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ , feito a equação (3.18). Contudo, como  $\mathcal{L}$  multiplica  $\rho$  pelos dois lados, a solução para a (3.22) não é tão trivial. Ainda assim, sendo  $\mathcal{L}$  um operador linear, a solução toma a mesma forma:  $\mathcal{L}$  é o *gerador* de um mapa  $\mathcal{E}_t$  tal que

$$\rho(t) = \mathcal{E}_t(\rho(0)). \quad (3.23)$$

O que queremos descobrir é qual é a forma desse gerador  $\mathcal{L}$  para que o mapa  $\mathcal{E}_t$  seja um canal quântico. Faremos primeiro uma dedução aparentemente restritiva, repleta de uma série de aproximações, mas que é fisicamente mais compreensível. Em seguida, apresentaremos um rascunho da prova do teorema de Lindblad, que demonstra que a forma que encontramos é a única para o tipo de sistemas que iremos estudar.

---

<sup>2</sup>Como o sistema aberto em geral não pode ser descrito por um estado puro (em seu espaço de Hilbert reduzido) por estar emaranhado com o ambiente, só fará sentido usar o formalismo de von Neumann daqui em diante.

### 3.3.1. Equação mestra de Born-Markov

Encontrar os geradores das evoluções temporais em sistemas fechados é um problema muitíssimo mais simples do que o defronte de nós justamente porque essas transformações formam um grupo. Uma série de condições deverão ser impostas aos sistemas abertos para que possamos chegar a qualquer lugar.

**Condição 1:** *As dimensões do ambiente devem tender ao infinito*

O modelo que queremos estudar consiste em um sistema  $S$  interagindo com um ambiente  $A$ . Como vimos na sec. 3.1, todo sistema aberto cuja dinâmica não pode ser descrita por unitárias pode ser dilatado para um espaço maior cuja dinâmica é unitária. De maneira mais concreta, o nosso sistema combinado  $S \otimes A$  é por construção fechado. Sua dinâmica é gerada por uma Hamiltoniana. Isso induziria qualquer modelagem do sistema reduzido  $S$  a erros a medida que o tempo de evolução  $t$  se aproximasse do tempo de recorrência de Poincaré  $\tau_R$  da dinâmica do sistema combinado  $S \otimes A$ . Para que possamos encontrar uma solução exata para  $\mathcal{L}$ , devemos impor que  $A$  tenda ao infinito, de modo que  $\tau_R$  também o tenda [25]. Ou seja, para termos um sistema genuinamente irreversível, nosso ambiente deve ser um *reservatório*, *i.e.* **tem infinitos graus de liberdade** [19].

Mais em particular, o ambiente que modelaremos será um *banho*: um reservatório em estado de equilíbrio térmico, ou seja, seu estado estacionário é dado pela distribuição canônica:

$$\bar{\rho}_B = \frac{e^{-\beta \hat{H}_B}}{\text{Tr}_B [e^{-\beta \hat{H}_B}]}, \quad (3.24)$$

onde  $\hat{H}_B$  é a hamiltoniana livre do banho.

#### Representação de interação

Seja a evolução (unitária) do estado combinado dada pela Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_I, \quad (3.25)$$

onde  $\hat{H}_S$  e  $\hat{H}_B$  são respectivamente as Hamiltonianas livres do sistema reduzido e do ambiente (banho) e  $\hat{H}_I$  descreve a interação entre ambos. No presente momento, apenas

o último termo nos interessa. O isolaremos empregando a *representação de interação*:

Para alguns tipos de dinâmicas, é interessante separar a Hamiltoniana  $\hat{H}(t)$  em  $\hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)$ , onde  $\hat{H}_0$  é independente do tempo e relativamente simples, enquanto  $\hat{H}_I(t)$  pode depender do tempo e/ou ser mais complicada. Definimos um operador unitário

$$\hat{U}_0(t, t_0) \equiv e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (3.26)$$

Por simplicidade, usaremos  $t_0 = 0$  e  $\hat{U}_0(t) \equiv \hat{U}_0(t, 0)$ . Com ele, para  $\hat{U}(t) = e^{-iHt}$  o operador unitário de evolução, podemos definir um novo operador de evolução no *referencial de interação* (IF na sigla em inglês), assim como os observáveis e matrizes densidade:

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{U}(t), \\ \hat{A}^{(I)}(t) &= \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{A}^{(S)} \hat{U}_0(t), \quad \rho^{(I)}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \rho^{(S)}(t) \hat{U}_0(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde os operadores com o <sup>(I)</sup> correspondem aos no referencial de interação, e os com <sup>(S)</sup> aos na representação de Schrödinger. Note que, assim como na mudança entre as representações de Schrödinger e de Heisenberg, na transformação para a de interação o valor esperado dos observáveis também é independente da representação escolhida:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}^{(I)}(t) \rangle &= \text{Tr} \left[ \hat{A}^{(I)}(t) \rho^{(I)}(t) \right] = \text{Tr} \left[ \hat{U}_0(t) \hat{A}^{(S)} \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{U}_0(t) \rho^{(S)}(t) \hat{U}_0^\dagger(t) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \hat{A}^{(S)} \rho^{(S)}(t) \right] = \langle \hat{A}^{(S)}(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

O que faz da representação de interação interessante é que podemos usar que  $\hat{A}^{(S)}$  e  $\rho^{(S)}$  são constantes no tempo para isolar a dependência das equações de von Neumann nesse referencial:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^{(I)}(t) = -i [\hat{A}^{(I)}(t), \hat{H}_0], \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{dt} \rho^{(I)}(t) = -i [\hat{H}_I^{(I)}(t), \rho^{(I)}(t)], \quad (3.30)$$

onde  $\hat{H}_I^{(I)}(t) = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_I(t) \hat{U}_0(t)$



**Condição 2:** *Limite de interação fraca*

Voltamos agora à nossa Hamiltoniana (3.25). Definimos  $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_S + \hat{H}_B$ , levamos todo o sistema para a representação de interação, e usamos agora a equação (3.30) de modo que nosso estado depende apenas de  $\hat{H}_I^{(I)}(t)$ .

Nota: para evitar excesso de notação, deste ponto em diante um operador sem o chapéu denotará que se encontra na representação de interação<sup>3</sup>:  $\hat{H}_I^{(I)}(t) \rightarrow H_I(t)$ .

Portanto, como indica (3.30),

$$\frac{d}{dt}\rho(t) \equiv \dot{\rho}(t) = -i [H_I(t), \rho(t)]. \quad (3.31)$$

Integrando-a no tempo para encontrar  $\rho(t)$ , temos:

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t ds [H_I(s), \rho(s)]. \quad (3.32)$$

Inserindo esse  $\rho(t)$  dentro do comutador da (3.31), temos:

$$\dot{\rho}(t) = -i [H_I(t), \rho(0)] - \int_0^t ds [H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]]. \quad (3.33)$$

Para obter a dinâmica do sistema reduzido, tiramos agora o traço parcial sobre o espaço do banho. Assumindo que  $\text{Tr}_B [H_I(t), \rho(0)] = 0$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}_B [\rho(t)] = \dot{\rho}_S(t) = - \int_0^t ds \text{Tr}_B [H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]]. \quad (3.34)$$

Poderíamos recursivamente ir substituindo o  $\rho(t)$  dentro de (3.34) por (3.32) para formar uma série de Taylor, mas enfim usamos a nossa condição 2: se  $H_I \ll \hat{H}_0$ , uma expansão sua à segunda ordem basta para descrever suficientemente bem  $\dot{\rho}_S(t)$ .

---

<sup>3</sup>Isso produz uma possível ambiguidade para a matriz densidade  $\rho$ , que convencionalmente nunca é escrita com chapéu. Exceto se explicitamente indicado por um <sup>(I)</sup> ou <sup>(S)</sup>, a matriz densidade se encontrará na mesma representação dos demais operadores da equação.

**Condição 3:** *Aproximação de Born*

O banho não é significativamente alterado pelo que acontece com o sistema.

Para banhos suficientemente grandes com tempo de relaxamento  $\tau_B$  suficientemente menor que o tempo de relaxamento do sistema  $\tau_R$ <sup>4</sup>, a aproximação é válida.

Podemos reescrever a matriz densidade do sistema combinado como:

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \bar{\rho}_B. \quad (3.35)$$

Substituindo esse  $\rho(t)$  na (3.34), obtemos:

$$\dot{\rho}_S(t) = - \int_0^t ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \bar{\rho}_B] \right]. \quad (3.36)$$

**Condição 4:** *Aproximação de Markov*

Assumimos agora que a interação entre o sistema e o banho é sempre igual, independente do momento no tempo em que ocorre. Assim podemos fazer a substituição  $\rho(s) \rightarrow \rho(t)$  e obtemos a chamada **equação de Redfield**:

$$\dot{\rho}_S(t) = - \int_0^t ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \bar{\rho}_B] \right]. \quad (3.37)$$

Isso ainda não é suficiente para que essa equação mestra descreva um processo de fato Markoviano como os descritos na seção 3.2, pois ela não é homogênea: ainda depende de uma escolha para a preparação de  $H_I(t=0)$  no instante inicial. Sem que percamos essa dependência em  $t=0$  não seremos capazes de modelar a dinâmica do sistema reduzido como um semigrupo dinâmico. O próximo passo é a aproximação de Markov em si: substituímos o limite inferior da integral por infinito negativo:  $\int_0^t \rightarrow \int_{-\infty}^t$ . Em seguida, fazemos a mudança de variável  $s \rightarrow (t-s)$ , o que modifica novamente os limites de integração para  $\int_0^\infty$ , obtendo-se enfim a **equação mestra quântica Markoviana**<sup>5</sup>:

$$\dot{\rho}_S(t) = - \int_0^\infty ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \bar{\rho}_B] \right]. \quad (3.38)$$

---

<sup>4</sup>Os tempos de relaxamento são dados tal que  $\rho_B(t > \tau_B) \approx \bar{\rho}_B$  (dado na eq. (3.24)) e  $\rho_S(t > \tau_R) \approx \bar{\rho}_S = e^{-\beta H_S} / \operatorname{Tr}_S[e^{-\beta H_S}]$ .

<sup>5</sup>As vezes chamada de *equação de Redfield-II*. Neste caso, a equação (3.37) seria de Redfield-I.

Conquanto o integrando decaia rapidamente para  $s \gg \tau_B$ , (o que é razoável se esperar para uma equação Markoviana com memória curta do passado e um banho infinito com tempo de relaxamento indo a zero), essa aproximação é boa.

### 3.3.2. Equação de Lindblad

Temos um problema, no entanto. Por mais que a equação (3.38) preserve sempre o traço e a Hermiticidade da matriz densidade reduzida  $\rho_S$ , ela não garante que ela vai se manter positiva (condição fundamental para que descreva um processo físico) [30]! Precisamos ir além se queremos encontrar os geradores de um semigrupo dinâmico:

#### Condição 5: Aproximação de secular

Voltemos à representação de Schrödinger. Decomponhamos a Hamiltoniana de interação em pares de operadores Hermitianos:

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha} \hat{A}_{\alpha} \otimes \hat{B}_{\alpha}, \quad (3.39)$$

onde  $\hat{A}_{\alpha} \in \mathcal{H}_S$  e  $\hat{B}_{\alpha} \in \mathcal{H}_B$ . O nosso interesse numa decomposição desse tipo é que quando mudarmos o referencial para a representação de interação, teremos separados:

$$H_I(t) = \sum_{\alpha} e^{iH_0 t} (\hat{A}_{\alpha} \otimes \hat{B}_{\alpha}) e^{-iH_0 t} = \sum_{\alpha} e^{iH_S t} \hat{A}_{\alpha} e^{-iH_S t} \otimes e^{iH_B t} \hat{B}_{\alpha} e^{-iH_B t}. \quad (3.40)$$

Fazendo uma escolha acertada desses  $\hat{A}_{\alpha}$ 's, poderemos facilitar a aproximação secular mais para a frente. No caso, supondo sem perda de generalidade que o espectro da Hamiltoniana livre do sistema reduzido  $\hat{H}_S$  é discreto, com autovalores  $\epsilon$  e respectivos autoprojetores  $\Pi(\epsilon)$ , construímos:

$$A_{\alpha}(\omega) \equiv \sum_{\epsilon} \Pi(\epsilon) \hat{A}_{\alpha} \Pi(\epsilon + \omega) \quad (3.41)$$

para cada diferença de energia  $\omega$ . Note que esse é um auto-operador da Hamiltoniana com frequências  $\pm\omega$ :

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega), \quad (3.42)$$

$$[H_S, A_\alpha^\dagger(\omega)] = e^{+i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega), \quad (3.43)$$

o que implica que

$$e^{i\hat{H}_S t} A_\alpha^\dagger(\omega) e^{-i\hat{H}_S t} = e^{\mp i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega). \quad (3.44)$$

Definindo o operador  $B_\alpha(t) = e^{i\hat{H}_B t} \hat{B}_\alpha e^{-i\hat{H}_B t}$ , temos na representação de interação:

$$H_I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \otimes B_\alpha(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{+i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\alpha^\dagger(t) \quad (3.45)$$

Note que a condição  $\text{Tr}_B[H_I(t), \rho(0)] = 0$  que impomos anteriormente agora implica que

$$\langle B_\alpha(t) \rangle \equiv \text{Tr}[B_\alpha(t)\rho_B] = 0. \quad (3.46)$$

Ou seja, que as médias do reservatório se cancelam. Podemos também encontrar as *funções de correlação do banho*:

$$\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle \equiv \text{Tr}_B[B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s)\rho_B] \quad (3.47)$$

Se, como estamos supondo,  $\rho_B$  é o estado estacionário do banho ( $\dot{\rho}_B = [H_B, \rho_B] = 0$ ), (3.47) são homogêneas, e, portanto, para todo  $t$ ,  $\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle = \langle B_\alpha^\dagger(s) B_\beta(0) \rangle$ .

É de nosso interesse agora definir a transformada de Fourier de (3.47):

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \equiv \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle, \quad (3.48)$$

que evidentemente perderá a sua dependência no tempo caso (3.47) seja homogênea. Como já assumimos a hipótese (3.46), esse necessariamente será o caso, e  $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ .

Voltando à equação (3.38), primeiro a abrimos:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_S(t) &= - \int_0^\infty ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \rho_B] \right] \\ &= \int_0^\infty ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t-s) \rho_S(t) \rho_B H_I(t) - H_I(t) H_I(t-s) \rho_S(t) \rho_B \right] + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (3.49)$$

onde h.c. significa conjugado Hermitiano. Em seguida, substituímos os  $H_I(t)$ 's pela sua versão decomposta (3.45):

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I(t-s) \rho_S(t) \rho_B H_I(t) \right] \\ &= \int_0^\infty ds \operatorname{Tr}_B \left[ \left( \sum_{\beta, \omega} e^{-i\omega(t-s)} A_\beta(\omega) B_\beta(t-s) \right) \rho_S(t) \rho_B \left( \sum_{\alpha, \nu} e^{+i\nu t} A_\alpha^\dagger(\nu) B_\alpha^\dagger(t) \right) \right] \\ &= \sum_{\omega, \nu} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\nu-\omega)t} \left( A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\nu) \right) \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \operatorname{Tr}_B \left[ B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rho_B \right] \\ &= \sum_{\omega, \nu} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\nu-\omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\nu) \right),\end{aligned}\quad (3.50)$$

onde usamos a ciclicidade do traço. Lembrando que  $\Gamma_{\alpha\beta}^\dagger(-\omega) = \Gamma_{\beta\alpha}(\omega)$ , fazemos contas análogas para as outras componentes e substituindo-nas em (3.50), temos:

$$\dot{\rho}_S(t) = \sum_{\omega, \nu} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\nu-\omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\nu) - A_\alpha^\dagger(\nu) A_\beta(\omega) \rho_S(t) \right) + \text{h.c.} \quad (3.51)$$

Nosso próximo passo é enfim utilizar a *aproximação secular*. Seja  $\tau_S$  a escala de tempo típica da evolução intrínseca do sistema. A equação acima nos indica que ela é da ordem de  $\tau_S \sim |\nu - \omega|^{-1}$  se  $\nu \neq \omega$ . Se  $\tau_s \gg \tau_R$ , o tempo de relaxamento do sistema, então todos os termos em função de  $e^{i(\nu-\omega)t}$  são negligenciáveis exceto quando  $\nu = \omega$ , portanto  $e^{i(\nu-\omega)t} \rightarrow \delta_{\nu, \omega}$ , e a equação acima se torna:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_S(t) &= \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left( A_\beta(\omega) \rho_S(t) A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega) \rho_S(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\beta\alpha}(\omega) \left( A_\alpha(\omega) \rho_S(t) A_\beta^\dagger(\omega) - \rho_S(t) A_\beta^\dagger(\omega) A_\alpha(\omega) \right) \right]\end{aligned}\quad (3.52)$$

Em seguida, decompomos a transformada de Fourier em duas matrizes Hermitianas:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega), \quad (3.53)$$

onde a  $F_{\alpha\beta}(\omega)$  é positiva. Definimos agora a Hamiltoniana de Lamb-shift:

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega). \quad (3.54)$$

Note que por conta do +h.c. na (3.52) e da Hermitianicidade de  $S_{\alpha\beta}(\omega)$ , quando abriremos o  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\dagger}(\omega)$  nela, os termos em que a matriz densidade se encontra “sanduichada” pelos operadores  $A$  se cancelarão. Note também que como por construção  $[H_S, A_{\alpha}^{\dagger}(\omega)A_{\beta}(\omega)] = 0 = [H_S, H_{LS}]$ . A contribuição da  $S_{\alpha\beta}(\omega)$  para a (3.52) portanto fica:

$$-i[H_{LS}, \rho_S(t)] \quad (3.55)$$

Com os termos restantes da equação (3.52), dependentes de  $F_{\alpha\beta}$ , vamos definir o superoperador *Dissipador*:

$$\mathcal{D}_A(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta}(\omega) \frac{1}{2} \left( A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \right) + \text{h.c.} \quad (3.56)$$

Mas, como  $F_{\alpha\beta}(\omega)$  é positivo, podemos diagonalizá-lo:  $\gamma_{\alpha}(\omega)\Pi_{\alpha}$ , onde  $\gamma_{\alpha}(\omega)$  são os seus autovalores (todos não negativos) e  $\Pi_{\alpha}$  é o autoprojetor correspondente. Assim, o dissipador pode ser reescrito como:

$$\mathcal{D}_A(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(\omega) \left( A_{\alpha}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\alpha}(\omega), \rho_S(t) \} \right), \quad (3.57)$$

onde  $\{ \cdot, \cdot \}$  é o anti-comutador.

Por fim, **retornamos para a representação de Schrödinger**. Note que pelas regras de comutação dos operadores  $A_{\alpha}^{(\dagger)}$  (3.42) e (3.43), o autovalor de um cancela o do outro. Assim, para a construção tanto do Dissipador quanto da Hamiltoniana de Lamb-shift,  $[H_0, \mathcal{D}(\rho_S)] = 0 = [H_0, H_{LS}]$  e, portanto, ambos são invariantes sob a mudança de referencial (3.27). Desse modo, a única mudança na equação mestra quântica decorrente

dessa troca de representação é a reintrodução de  $\text{Tr}_B[H_0, \rho(t)] = [H_S, \rho_S(t)]$  a ela. Contudo, como assumimos interação fraca,  $H_{LS} \ll H_S$ , em vários casos (em particular, o que trabalharemos mais adiante) é possível ignorar a contribuição da (3.55) de todo e simplificar a Hamiltoniana que dá a evolução interna do sistema reduzido condicionado pelo banho para  $H \equiv H_{LS} + H_S \approx H_S$ .

Finalmente, a equação mestra quântica Markoviana do sistema reduzido pode ser escrita em sua forma mais famosa, a **equação de Lindblad**:

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H_S, \rho_S(t)] + \mathcal{D}_A(\rho_S), \quad (3.58)$$

que também é conhecida como *equação de GKSL*<sup>6</sup>, *equação mestra global* (GME) e *equação de Born-Markov-secular*. Ela, como esperado, garante que a matriz densidade reduzida  $\rho_S(t)$  para todo  $t$  preserve seu traço e se mantenha Hermitiana e positiva, além de ter o estado térmico  $\bar{\rho}_S = e^{-\beta H_S} / \text{Tr}_S[e^{-\beta H_S}]$  como solução estacionária [19, 30] (justificando a aplicabilidade da aproximação de Born).

No entanto, por enquanto estamos apenas afirmando que a equação acima é de fato a equação de Lindblad, ou seja, que satisfaz as condições para ser o gerador de um semigrupo dinâmico quântico. O rascunho da prova dessa afirmação se encontrará na seção 3.5.

### 3.4. Modelo colisional e a equação de Lindblad local

O esquema apresentado na seção anterior é interessantíssimo por justificar fisicamente todas as aproximações necessárias para se chegar à equação de Lindblad, no entanto não nos ajuda muito quando o que queremos é simular uma trajetória quântica individual. Quem são os operadores  $A_\alpha(\omega)$ ?, como dependem da frequência  $\omega$ ?, nada disso está claro nem é muito implementável.

Vamos refazer a derivação, agora, utilizando um modelo ainda mais específico para o ambiente e sua interação com o sistema, o **modelo colisional** [30, 32], que consiste na suposição de que podemos aproximar a interação entre o sistema e o banho como um con-

---

<sup>6</sup>Em referência a V. Gorini, A. Kossakowski e G. Sudarshan (o L é de G. Lindblad), que chegaram a um resultado semelhante mais ou menos ao mesmo tempo [31], que no entanto difere do de Lindblad por não terem diagonalizado os  $A$ 's no final.

junto de “colisões” (interações unitárias de duração extremamente curta) entre um subsistema do sistema (no nosso caso, um qubit) e uma partícula do banho térmico (chamada de *ancila*) (ver figura 3.2). Ou seja, este modelo considera que as interações não precisam

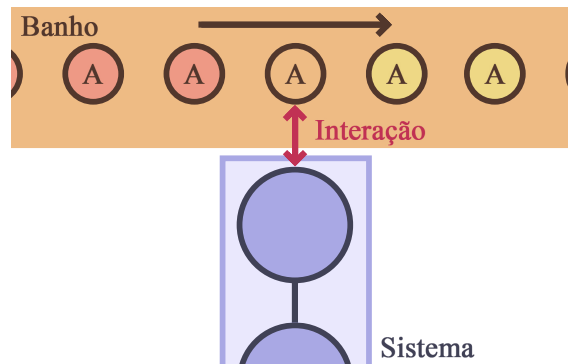


Figura 3.2: Representação esquemática do modelo colisional. O banho é composto por múltiplas ancilas  $A$ , idênticas e independentes, que, após interagirem localmente e uma por vez com o sistema, são descartadas.

ser descritas como o sistema globalmente emaranhado com a totalidade do banho. Em vez disso, essas “colisões” seriam de duração  $\tau$  tão curta que se torna razoável desconsiderar todas as demais interações *intra*-sistema e *intra*-banho durante esse intervalo de tempo: podemos tratar a interação como se o qubit e a ancila estivessem momentaneamente isolados do resto. Assim que a interação acaba, realizamos uma medição na ancila, o que a “desemaranha” do qubit. Para o resto do sistema, é como se o qubit colidido tivesse mudado instantaneamente de estado, e essa mudança se propaga mais lentamente para a totalidade do sistema por meio da Hamiltoniana interna (veremos mais a fundo esse tipo de dinâmica, chamado de “salto quântico”, no capítulo 4).

No entanto, o modelo colisional que utilizaremos<sup>7</sup> considera também uma segunda simplificação: todas as ancilas são idênticas e independentes umas das outras. Visto que já assumimos que o tempo de relaxamento do banho é extremamente curto e o número de partículas é infinitamente grande, é uma consequência natural que possamos assumir que toda ancila se encontra no estado térmico (3.24), e que, após uma colisão, volte rapidamente a ele. Em termos práticos, garante que as colisões agem no sistema como um processo de Markov.

<sup>7</sup>Existem diversos modelos colisionais, alguns que são capazes de descrever inclusive interações não Markovianas [32–34], mas isso está além do escopo do presente trabalho. Naturalmente, modelos distintos levam a formas distintas de escrever a Hamiltoniana (3.59).



Deste modo, podemos reescrever a Hamiltoniana total do sistema combinado como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{H}_I \\ &= \sum_i \hat{H}_S^i + \sum_{i<j} \hat{H}_S^{ij} + \sum_i \hat{H}_B^i + \sum_i \hat{H}_I^i,\end{aligned}\quad (3.59)$$

onde  $\hat{H}_S^i$  é a Hamiltoniana interna de cada subsistema  $i$ ,  $\hat{H}_S^{ij}$  as interações *intra*-sistema entre pares de subsistemas e  $\hat{H}_B^i$  a Hamiltoniana interna de cada ancila  $i$ , que, por construção, interage individualmente com o subsistema  $i$  por meio da Hamiltoniana  $\hat{H}_I^i = \sum_\alpha \hat{A}_\alpha^i \otimes \hat{B}_\alpha^i$ , separável como na equação (3.39).

Mudando para a representação de interação com relação às Hamiltonianas livres  $H_0 = \sum_i (\hat{H}_S^i + H_B^i)$ , obtemos a equação de von Neumann:

$$\dot{\rho}(t) = -i \left[ \left( \sum_{i<j} H_S^{ij}(t) + \sum_i H_I^i(t) \right), \rho(t) \right]. \quad (3.60)$$

Supondo que a interação do sistema com o banho seja fraca, que as interações *intra*-sistema são mais fracas ainda e que o estado inicial do sistema combinado é separável com as ancilas termalizadas  $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes_i \bar{\rho}_B^i$ , a aproximação de Born  $\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes_i \bar{\rho}_B^i$  é válida e podemos fazer a expansão por Taylor, substituindo  $\rho(t)$  pela integral dessa equação de von Neumann feito em (3.33) e tirar o traço parcial no banho, obtendo:

$$\dot{\rho}_S(t) = -i \sum_{i<j} \left[ H_S^{ij}(t), \rho_S(t) \right] - \sum_i \int_0^t ds \operatorname{Tr}_B \left[ H_I^i(t), [H_I^i(s), \rho_S(s) \otimes_i \bar{\rho}_B^i] \right], \quad (3.61)$$

onde os termos em primeira ordem de  $H_I^i$  se cancelam porque assumimos que  $\operatorname{Tr}_B [H_I(t), \rho_B] = 0$ , e os termos em segunda ordem de  $H_S^{ij}$  e os termos cruzados podem ser ignorados.

Evidente que podemos repetir todas as aproximações feitas na seção 3.3 e chegar em uma versão local das equações de Redfield, de Born-Markov e de Lindblad. Por enquanto, vamos parar por aqui, porque o que torna o modelo colisional tão poderoso é a facilidade com que com ele encontramos os operadores de pulso  $A_\alpha$  a partir do traço parcial da interação unitária entre um único qubit e uma única partícula no estado térmico e, em seguida, como essa mudança súbita neste qubit se propaga (por meio de  $H_S^{ij}$ ) às demais componentes do sistema. Quando tratarmos dos modelos simulados em particular,

voltaremos a esse tópico.

### 3.5. Teorema de Lindblad

O teorema de Lindblad prova que todo semigrupo dinâmico quântico (sob condições que já explicitaremos) tem geradores  $\mathcal{L}$  com a forma:

$$\mathcal{L}(\rho) \equiv \frac{d\rho}{dt} = -i[\hat{H}, \rho] + \sum_k \gamma_k \left[ \hat{L}_k \rho \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \rho \} \right], \quad (3.62)$$

onde  $\hat{H}$  é um operador Hermitiano,  $\hat{L}_k$  um operador arbitrário,  $\gamma_k \geq 0$  e  $\{ \cdot, \cdot \}$  é o anticomutador — e esta é a forma mais geral desses geradores. Ademais, também prova que, **dadas as aproximações impostas**, semigrupos dinâmicos são a maneira adequada de descrever a evolução temporal de um sistema reduzido dado que o sistema combinado evolui unitariamente.

Apresentaremos aqui apenas um rascunho da prova feita por G. Lindblad em seu artigo de 1976 [25] (usando também a seção 3.2 de [19] como referência), pois uma demonstração completa exigiria uma re-elaboração extensiva deste texto, redefinindo de maneira formal todos os aspectos algébricos da mecânica quântica que ignoramos até aqui, o que está muito além do nosso escopo. É essencial ter em mente que esta seção, em acordo com as referências supracitadas, se encontrará inteiramente na representação de Heisenberg, e não na de Schrödinger como o resto do trabalho, mas as conclusões são equivalentes.

Sejam os *mapas dinâmicos*  $\mathcal{E}_t$  uma família de 1-parâmetro de mapas que levam operadores lineares em um espaço de Hilbert a operadores lineares no mesmo espaço de Hilbert. Os axiomas de um semigrupo dinâmico [25] são:

- i.  $\mathcal{E}_t$  é completamente positivo (CP)
- ii.  $\mathcal{E}_t(I) = I$ , para  $I$  operador identidade em seu respectivo espaço
- iii.  $\mathcal{E}_t \mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{t+s}$
- iv.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{E}_t - I\| = 0$  (no nosso caso, a norma é dada por  $\|\cdot\| \equiv \text{Tr}_S[\cdot \rho_S]$ )
- v.  $\mathcal{E}_t$  é ultrafraco contínuo.

Um mapa que satisfaz essas condições é dito *contrativo*, ou seja, para todo operador  $X$ ,

$$\|X\| \geq \|\mathcal{E}_t(X)\| \quad (3.63)$$

e portanto é possível se utilizar da teoria de semigrupos contrativos [25] e afirmar que existe um operador linear (não necessariamente limitado)  $\mathcal{L}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \mathcal{L}(X) - \frac{\mathcal{E}_t(X) - X}{t} \right\| = 0 \quad (3.64)$$

para qualquer operador  $X$ . Ou seja, um *gerador* do semigrupo, que precisa satisfazer:

vi.  $\mathcal{E}_t = e^{t\mathcal{L}}$

vii.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{L} - t^{-1}(\mathcal{E}_t - I)\| = 0$

viii.  $\mathcal{L}$  é ultrafraco contínuo.

Uma consequência imediata dessas propriedades é que  $\mathcal{E}_t$  pode ser escrito na representação de Kraus (2.29) [25, 26].

É bastante imediato verificar que um sistema tal como os descritos nas seções anteriores satisfaz todas essas condições.

Note, no entanto, que ele está definido no espaço de Hilbert do sistema reduzido  $\mathcal{H}_S$ . Para o sistema combinado,  $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \otimes I_n$ , onde  $I_n$  é a identidade do espaço do reservatório com um número contável  $n$  de dimensões.  $\mathcal{L}_n$  ainda é o gerador dos mapas de evolução do semigrupo dinâmico deste espaço combinado.

Além disso, precisamos fazer uma definição [25]: seja a *função dissipativa*, mapa que leva pares de operadores a operadores,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X, Y) = \mathcal{L}(X^\dagger Y) - \mathcal{L}(X^\dagger)Y - X^\dagger \mathcal{L}(Y) \quad (3.65)$$

Se o mapa  $\mathcal{L}$  for limitado, esse gerador satisfaz  $\mathcal{L}(I) = 0$  e  $\mathcal{L}(X^\dagger) = \mathcal{L}(X)^\dagger$  e  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(X, X) \geq 0$ <sup>8</sup> para todo operador  $X$  e natural  $n$ , então  $\mathcal{L}$  é **completamente dissipativo** (CD). Note que  $\mathcal{L}(I) = 0$  e  $\mathcal{L}(X^\dagger) = \mathcal{L}(X)^\dagger$  estendem para  $\mathcal{L}_n$ , que o conjunto dos

---

<sup>8</sup>Recorde que quando um operador linear (ou superoperador, no caso) é positivo, a implicação direta que de fato nos interessa é que ele pode descrever um observável físico.

mapas CD forma um cone convexo<sup>9</sup> e que a igualdade  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(X, X) = 0$  vale para os casos *puros*, ou seja, que residem na extremidade do cone e descrevem evoluções unitárias (*i.e.* fechadas) do sistema reduzido. Isto é, se  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_n}(X, X) > 0$ , descreve uma evolução dissipativa.

Este último ponto é particularmente relevante. Uma das características mais importantes dos geradores é que a sua decomposição em uma parte Hermitiana e uma dissipativa não é única. Em particular, há uma classe de equivalência entre duas decomposições do gerador  $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$  se, e somente se,  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(X, X) = \mathcal{D}_{\mathcal{L}'}(X, X) \Leftrightarrow \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}'(X) = \mathcal{L}(X) + i[H, X]$  para todo operador  $X$  no espaço de Hilbert e para algum operador Hermitiano  $H$ .

A prova que Lindblad faz, e que não reproduziremos aqui por uma questão de complexidade e enfoque, é que (proposição 5 de [25]) se  $\mathcal{L}$  for completamente dissipativo, existirá um mapa completamente positivo  $\Psi$  tal que

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] + \Psi(X) - \frac{1}{2}\{\Psi(I), X\}, \quad (3.66)$$

para todo operador linear  $X$  e para algum operador Hermitiano  $H$  no espaço de Hilbert, e que o inverso (proposição 6 de [25]) também é válido. Note que escrevendo esse mapa CP na representação de Krauss (atentando que  $\Psi(I) = \sum_i K_i^\dagger K_i$ ) e voltando da representação de Heisenberg para a de Schrödinger, recuperamos a equação de Lindblad (3.62).

---

<sup>9</sup>Um conjunto  $C$  é um *cone convexo* se  $x\alpha + \beta y \in C$  para todo par de elementos  $x, y \in C$  e  $\alpha, \beta$  reais não negativos.

# 4

## Saltos quânticos

Voltemos ao conceito de *trajetória*, apresentado na seção sobre processos Markovianos (sec. 3.2). Uma **trajetória quântica** é a evolução do estado *condicionado* do sistema (contínua ou não) dado que sua evolução *não* condicionada é contínua. Esclareçamos por partes essa definição. Primeiro, deve-se recordar que o estado *condicionado* é o estado condicionado pelos resultados de uma série de medições, e o *não condicionado* é o valor esperado do estado dado que houve uma medida (e medidas, na mecânica quântica, sempre alteram o estado do sistema), mas não sabemos seu resultado. Ilustremos essa definição com um exemplo muito simples de trajetória quântica:

Seja um sistema que pode ser medido a todo instante por um par de operadores de medida generalizada  $\hat{M}_0$  e  $\hat{M}_1$ . Por “todo instante”, leia-se que a cada intervalo finito de tempo  $dt$  uma medida (de duração  $\leq dt$ ) é realizada, podendo retornar um dos dois resultados. Isso é o que se chama **monitoramento** ou **medida contínua**. Recordando a seção 2.2.2, o estado  $\rho$  após a medição  $k = 0,1$  será dado por  $\rho_k(t + dt) = \mathcal{J}_k \rho(t) / p_k \equiv \mathcal{J}[\hat{M}_k] / p_k \equiv \hat{M}_k \rho(t) \hat{M}_k^\dagger / p_k$ , onde  $k$  corresponde a qual medida se realizou e  $p_k = \text{Tr}[\hat{M}_k \rho(t) \hat{M}_k^\dagger]$  sua respectiva probabilidade<sup>1</sup>. Assim, para  $t_n \equiv t_0 + n dt$ , o estado do sistema após  $n$  medições será:

$$\rho_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n}(t_n) = \frac{\mathcal{J}_{k_n} \mathcal{J}_{k_{n-1}} \cdots \mathcal{J}_{k_1} \rho(t_0)}{\text{Tr}[\mathcal{J}_{k_n} \mathcal{J}_{k_{n-1}} \cdots \mathcal{J}_{k_1} \rho(t_0)]}, \quad (4.1)$$

onde evidente que o estado final é condicionado ao resultado das medições em cada ins-

---

<sup>1</sup>Observação: como deste ponto em diante trabalharemos quase exclusivamente com estados condicionados, omitiremos, por simplicidade, o apóstrofo utilizado nos capítulos anteriores:  $\rho' \rightarrow \rho$ . Toda vez um estado for não condicionado, isso será explicitamente mencionado.

tante de sua evolução (e.g. se temos uma medida  $\hat{M}_0$  seguida por três  $\hat{M}_1$ 's, o estado final será  $\rho_{0,1,1,1}$ , etc.).

Agora suponhamos que por algum motivo deixamos esse equipamento rodando, mas ninguém estava lá para registrar os resultados. Sabemos que as medições necessariamente modificaram o sistema, mas não temos como saber qual das duas medidas foi realizada em cada instante. Deste modo, o máximo que podemos fazer é, para o primeiro intervalo  $(t_0, t_1)$ , estimar o estado *não condicionado* em  $t_1$  tirando uma média dos dois estados *condicionados* possíveis ponderada pela probabilidade de cada medição. Se a probabilidade da  $\hat{M}_0$  for  $p_0$  e, portanto, a da  $\hat{M}_1$  for  $p_1 = 1 - p_0$ , teremos:

$$\rho(t_1) = p_0\rho_0(t_1) + (1 - p_0)\rho_1(t_1), \quad (4.2)$$

onde, como mencionado,  $\rho_k(t_1) = \mathcal{J}_k\rho(t_0)/p_k$ , para  $k = 0,1$ . Indutivamente, podemos reproduzir essa média ponderada para todos os demais intervalos  $(t_i, t_{i+1})$ , obtendo o estado não condicionado final  $\rho(t_n)$ .

Para que a equação (4.1) descreva uma *trajetória quântica*, é necessário que a evolução do estado condicionado seja contínua, ou seja, para todo passo  $t_i$ :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\rho(t_i + dt) - \rho(t_i)}{dt} = 0. \quad (4.3)$$

Se (4.3) for satisfeita<sup>2</sup>, cada uma das  $2^n$  combinações de  $\rho_{k_1, \dots, k_n}(t_n)$ , para  $k_i = 0,1$  e  $i = 1, \dots, n$ , será *uma* trajetória possível desse sistema ilustrativo. A função dessa condição de continuidade é garantir que, afora mudanças na matriz densidade em função do ganho de informação que os resultados das medições retornam, o ato de medir em si age como um observável físico no sistema. Recordamos da seção 2.2.2 que a medida quântica generalizada é constituída por um sistema quântico auxiliar chamado de *aparato de medição* que primeiro interage com o sistema e em seguida, em isolamento, é medido projetivamente. A condição de continuidade impõe que a interação entre o aparato e o sistema é de fato física.

---

<sup>2</sup>Salientamos, no entanto, que satisfazer a equação (4.3) experimentalmente é impossível:  $dt$  nunca poderia ir a zero porque a duração da medição sempre vai ser um tempo finito. Recordamos, no entanto, que tanto as trajetórias quanto a equação mestra são aproximações do comportamento de um sistema quântico real.

Notamos, no entanto, que a condição (4.3) não implica que as trajetórias em si também serão contínuas. Veremos um exemplo bastante importante a seguir.

As referências principais desse capítulo foram, assim como nos anteriores, os livros *The Theory of Open Quantum Systems* [19], de Heinz-P. Breuer e Francesco Petruccione, e *Quantum Measurement and Control* [17], de Howard M. Wiseman e Gerard J. Milburn. Ademais, o tutorial “*Current fluctuations in open quantum systems: Bridging the gap between quantum continuous measurements and full counting statistics*” [20], de Gabriel T. Landi, Michael J. Kewming, Mark T. Mitchison e Patrick P. Potts, também foi utilizado para a discussão sobre distribuição de tempos de espera.

## 4.1. Fotodeteção

Seja um sistema (uma cavidade ótica, por exemplo) que a cada instante tem densidade de probabilidade  $\wp$  de emitir um fóton. Suponha, então, que é possível captar esse fóton com detectores que a cada intervalo  $dt$  registram se uma emissão ocorreu ou não. Se uma emissão for detectada durante o intervalo  $(t, t + dt)$ , o sistema evoluirá em função de um operador de aniquilação bosônico  $\hat{a}$ :

$$\rho(t + dt) = \frac{\hat{a}\rho(t)\hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{a}\rho(t)\hat{a}^\dagger]}, \quad (4.4)$$

o que evidentemente será uma evolução descontínua.

Para  $dt$  curto o suficiente, podemos garantir que a probabilidade de duas ou mais emissões serem detectadas durante o mesmo intervalo é insignificante e, portanto, é possível definir completamente a evolução do sistema pelo par de operadores:

$$\begin{aligned} \hat{M}_0(dt) : & \quad \text{quando **nenhum** fóton é emitido durante intervalo,} \\ \hat{M}_1(dt) : & \quad \text{quando **um** fóton é emitido durante o intervalo.} \end{aligned}$$

$\hat{M}_1(dt)$  será dado pelo operador de aniquilação:

$$\hat{M}_1(dt) = \sqrt{\gamma dt} \hat{a}, \quad (4.5)$$

onde  $\gamma$  é uma taxa de decaimento. Já  $\hat{M}_0$ , que convencionalmente é chamado de **resultado-nulo** [17], indica que nenhum fóton foi trocado entre o sistema e o ambiente. Poderíamos esperar que se comportasse tal qual um operador de evolução temporal de um sistema fechado,  $\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t}$ , no entanto este não pode ser o caso.

Se  $\hat{M}_0(dt)$  for igual um operador de evolução temporal de um sistema fechado, será unitário, e, portanto,  $\hat{M}_0^\dagger(dt)\hat{M}_0(dt) = \hat{U}^\dagger(dt)\hat{U}(dt) = \hat{1}$ . No entanto,  $\hat{M}_0(dt)$  e  $\hat{M}_1(dt)$  são operadores de Kraus, portanto devem satisfazer a condição de completude  $\hat{M}_0^\dagger(dt)\hat{M}_0(dt) + \hat{M}_1^\dagger(dt)\hat{M}_1(dt) = \hat{1}$ , onde  $\hat{1}$  é a identidade. A justificativa física dessa condição é bastante simples: um ou outro deve necessariamente acontecer para o sistema evoluir, portanto a soma de suas probabilidades é 1. Deste modo, a única maneira de  $\hat{M}_0(dt)$  de fato evoluir o sistema igual a um operador unitário é se for o único operador  $\hat{M}_i(dt)$  não nulo, isto é, se o sistema for de fato fechado! Portanto, acabamos de encontrar uma propriedade bastante curiosa de sistemas quânticos abertos monitorados: quando existe a possibilidade de interação com o ambiente, mesmo quando sabemos que nada está sendo emitido ou absorvido pelo sistema, a dinâmica não é igual à de um sistema fechado. Pode até não estar acontecendo nenhuma troca de partículas (fótons, no nosso caso) durante aquele intervalo, mas nós estamos sim ganhando algo: a informação de que o sistema não está realizando uma troca! Recordemos que estamos trabalhando sob o paradigma da perspectiva operacional da mecânica quântica: a matriz de densidade corresponde ao que sabemos sobre o sistema, e o ato de medir que nada aconteceu nos ensina algo sobre ele.

No entanto, como  $\hat{M}_1^\dagger(dt)\hat{M}_1(dt) \propto dt$  é infinitesimal para intervalos suficientemente pequenos, podemos apenas subtrair uma correção a  $\hat{M}_0(dt)$  para que a condição de completude seja satisfeita:  $\hat{M}_0^\dagger(dt)\hat{M}_0(dt) = \hat{1} - \hat{M}_1^\dagger(dt)\hat{M}_1(dt) \approx \hat{1}$ . Assim, para  $\hat{H}$  a Hamiltoniana interna do sistema, definimos o operador de resultado-nulo como:

$$\hat{M}_0(dt) = \hat{U}(dt) - C \approx \hat{1} - i\hat{H} dt - C, \quad (4.6)$$

para  $C$  um fator de correção, que é definido lembrando que podemos ignorar toda contribuição de ordem superior a  $dt$  em  $(\hat{1} - C)^2 = \hat{1} - \gamma\hat{a}^\dagger\hat{a} dt$ :

$$\hat{M}_0(dt) = \hat{1} - dt(i\hat{H} + \frac{\gamma}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (4.7)$$



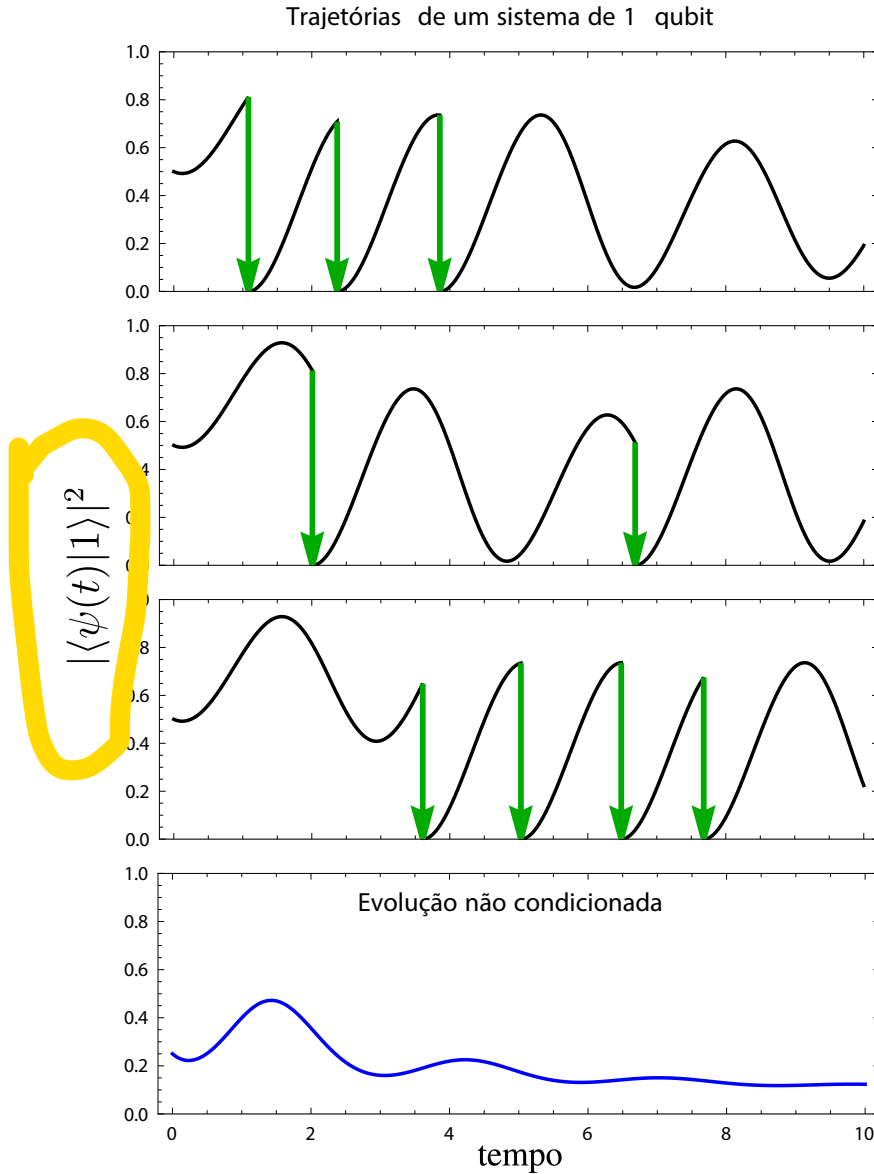


Figura 4.1: Três realizações diferentes de trajetórias quânticas de um mesmo sistema de 1 qubit para o mesmo estado inicial  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Plotamos a ocupação de seu estado excitado  $|\langle \psi(t)|1\rangle|^2$  no tempo. A evolução unitária é dada pela Hamiltoniana  $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x$ , as detecções de fótons emitidos indicadas pelas setas verdes. Notem que a detecção age no sistema com o operador  $\hat{L} = \hat{\sigma}_-/\sqrt{2}$ , e ato contínuo o vetor de estado colapsa para o estado fundamental (*i.e.*  $|\langle \psi(t)|1\rangle|^2 = 0$ ). O quarto gráfico é a evolução do estado não condicionado do sistema. O intervalo de tempo das medições foi  $dt = 0,001$ . Mais sobre os algoritmos utilizados para as simulações na seção 4.2.

A probabilidade de uma detecção ser realizada durante um dado intervalo  $dt$  será dada por

$$P_1 \equiv \wp dt = \text{Tr}[\mathcal{J}_1(dt)\rho] = \gamma dt \text{Tr}[\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho], \quad (4.8)$$

e a de nada ser detectado, por

$$P_0 = \text{Tr}[\mathcal{J}_0(dt)\rho] = 1 - \wp dt. \quad (4.9)$$

Note que como  $P_0 \approx 1 \gg dt \approx P_1$ , em praticamente todo instante a medição retorna o resultado-nulo, sendo a detecção de um fóton muito menos frequente, com frequência  $\wp$ .

Chamaremos esses pontos de “pulos”, mas frequentemente são encontrados na literatura com nome de “cliques” ou “saltos”. É vital recordar que para a perspectiva operacional essas discontinuidades que ocorrem toda vez que  $k = 1$  não são eventos físicos propriamente ditos, mas mudanças descontínuas *em nosso conhecimento sobre o sistema*.

Na figura 4.1 podemos ver um exemplo de três trajetórias desse tipo. Temos um sistema composto por um qubit evoluindo sob uma Hamiltoniana  $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x$ . As curvas pretas correspondem à componente excitada ( $|\langle\psi(t)|1\rangle|^2$ ) desse qubit para três simulações diferentes de trajetórias individuais. O algoritmo em si será explicado na seção 4.2, mas, em resumo, a cada intervalo de duração  $dt = 0,001$  unidades de tempo, uma medida é tirada. Na maior parte dos casos, obtemos como resposta o resultado-nulo ( $\hat{M}_0(dt)$ ) e o sistema evolui infinitesimalmente; mas de vez em quando um fóton é detectado ( $\hat{M}_1(dt)$ ) e o sistema imediatamente colapsa para o estado  $|0\rangle$  (ou seja, a sua componente excitada, plotada, pula instantaneamente para zero). Esses pulos são indicados pelas setas verdes. Atendo-nos aos três exemplos da figura 4.1, podemos ter uma noção de quão raras são essas detecções: para simulações de duração de 10 unidades de tempo, temos 10 mil medições, das quais apenas entre 2 e 4 levaram a pulos. Abaixo, em azul, plotamos também a componente excitada do qubit para a evolução não condicionada, calculada por meio da equação de Lindblad, que podemos verificar que é contínua.

Note que, como a evolução descontínua dada por  $\hat{M}_1(dt)$  tem probabilidade proporcional a  $dt$  de ocorrer, se tirarmos o limite  $dt \rightarrow 0$ , a contribuição dela para a evolução não condicionada vai a zero e a contribuição contínua de  $\hat{M}_0(dt)$  passa a dominar. Deste modo, estamos de fato trabalhando com uma trajetória quântica.

lução não condicionada da equação (4.2), e, como esperado, ele é dado pelo Liouvilliano  $\mathcal{L}$  (3.22):

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\rho(t+dt) - \rho(t)}{dt} \equiv \frac{d\rho}{dt} \equiv \mathcal{L}\rho(t) = -i[\hat{H}, \rho] + \gamma\mathcal{D}[\hat{a}]\rho, \quad (4.10)$$

lembrando que  $\mathcal{D}$  é o assim chamado **Dissipador**, definido como:

$$\mathcal{D}[\hat{a}]\rho \equiv \hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho\}. \quad (4.11)$$

### 4.1.1. Equações diferenciais estocásticas

Para construir as equações que regem a dinâmica de trajetórias individuais do sistema, precisaremos fazer uma breve introdução de alguns conceitos do cálculo estocástico. Este é um ramo extremamente extenso da matemática, e está muito além do escopo dessa dissertação se aprofundar em seus temas. Ao interessado, encontramos introduções bastante práticas para o nosso tipo de problema no capítulo 1 do Breuer & Petruccione [19] e no livro *Stochastic Processes for Physicists* [28], de Kurt Jacobs.

Recordemos que uma equação diferencial relaciona uma (ou múltiplas) função(ões) com suas derivadas. Para um sistema linear uma equação diferencial ordinária (EDO) do tipo  $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$  determina totalmente a dinâmica do sistema. Um exemplo de tal equação na mecânica quântica (onde todo sistema é linear) é a de Schrödinger. Contudo, devemos notar que os sistemas que as EDOs descrevem, por mais complexos que possam ser, são sempre determinísticos: conheço as condições iniciais  $x_0$  e sua EDO  $\frac{dx}{dt}$ , posso calcular o seu valor para todo instante futuro:  $x(t) = x_0 + \int_0^t ds \frac{dx}{ds}$ .

Entramos no campo do cálculo *estocástico* quando o incremento infinitesimal  $dx$  passa a ser uma variável aleatória. Temos então uma **equação diferencial estocástica** (SDE, na sigla em inglês). Para uma única variável  $x$ , o incremento pode ser separado entre uma parte determinística e uma parte estocástica:

$$dx = f(x,t) dt + g(x,t) d\xi(t), \quad (4.12)$$

onde ambas as funções  $f$  e  $g$  são lineares em  $x$  e  $d\xi(t)$  é o assim chamado **incremento estocástico**. Para sistemas Markovianos, há dois casos usuais para a distribuição de  $d\xi(t)$  [17]: ou ele é Gaussiano ou é o que é chamado de **processo pontual** (PP). O primeiro pode

acontecer porque se introduziu um *ruído* em  $x$ , e ele provoca pequenos e imprevisíveis desvios a todo instante. Nesse caso, onde o ruído é Gaussiano,  $d\xi = dW$ , conhecido como *incremento de Wiener*. Trataremos com mais atenção desse caso na seção 6.1, por enquanto, nos detenhemos no segundo caso pois é o que se aplica à fotodetecção: a qualquer instante um fóton pode ser emitido, levando a um incremento descontínuo e instantâneo da matriz densidade  $d\rho$  assim que esse fóton for detectado.

Para uma variável aleatória  $x$ , seu incremento de PP satisfaz:

$$dN(t)^2 = dN(t), \quad (4.13)$$

$$E[dN(t)] = \lambda(x) dt, \quad (4.14)$$

onde  $E[x]$  é o valor médio da variável  $x$  e  $\lambda(x)$  é uma função positiva. Note que (4.13) implica que necessariamente  $dN(t) = 0$  ou  $1$ . Também note que, por (4.14), como o valor médio do incremento é infinitesimal, da ordem de  $dt$ , todo termo de ordem  $\mathcal{O}(dN(t) dt)$  da SDE pode ser ignorado.

Uma das particularidades mais importantes para nós do cálculo estocástico é como a existência de um segundo termo infinitesimal nos obriga a modificar a regra da cadeia. Esse tema será retomado com mais atenção quando discutirmos medida difusiva. Por enquanto basta um caso particular: seja  $x$  uma variável estocástica solução de (4.12) (chamaremos as funções de  $f$  e  $g$  por simplicidade), e seja  $y = x^2$ . Portanto:

$$dy \equiv y(t + dt) - y(t) = (x(t + dt))^2 - (x(t))^2 = (x + dx)^2 - x^2 \quad (4.15)$$

$$= 2x dx + dx^2 = 2x(f dt + g dN) + (f dt + g dN)^2, \quad (4.16)$$

onde ignoramos todos os termos  $\mathcal{O}(dt^2, dN dt)$ , mas, como  $dN^2 = dN$ :

$$dy = 2x f dt + (2xg + g^2) dN. \quad (4.17)$$

Esse exemplo será útil para seguinte transformação:

$$d\rho \equiv d(|\psi\rangle\langle\psi|) = (d|\psi\rangle) \langle\psi| + |\psi\rangle (d\langle\psi|) + (d|\psi\rangle) (d\langle\psi|), \quad (4.18)$$

onde a contribuição em função de  $dN^2$  do último termo não poderá ser ignorada.

#### 4.1.2. Evolução estocástica da fotodeteção

Como mencionado anteriormente, um sistema que pode espontaneamente emitir fótons pode (dependendo de como é monitorado) se comportar como um PP. Seja  $N(t)$  o número de detecções em uma dada trajetória até o instante  $t$ . Como  $N(t)$  é sempre um inteiro, para todo  $t$ ,  $N(t + dt) = N(t) + dN(t)$ , onde  $dN(t)$  é seu *incremento estocástico*:

$$dN(t)^2 = dN(t), \quad (4.19)$$

$$E[dN(t)] = \langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle(t) = \text{Tr} \left[ \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rho(t) \right]. \quad (4.20)$$

Como esperamos, por (4.19), ou não detectamos nada, e o incremento é zero, ou detectamos uma única emissão de cada vez (se  $dt$  for curto o suficiente), e  $N$  incrementa 1. Do mesmo modo, (4.20) implica que  $E[dN(t)] = P_1$ , a probabilidade de se detectar um fóton.

Na figura 4.2, vemos uma representação gráfica tanto da *atividade dinâmica*  $N(t)$  (como é geralmente chamada) [17] quanto do incremento estocástico  $dN(t)$  para duas simulações distintas. Um intervalo de 10 unidades de tempo é dividido em 100 intervalos  $dt$  de duração 0,1 unidades de tempo (para que a simulação seja boa,  $dt$  tem que ser muito mais curto do que isso. Usamos aqui esse valor para enfatizar que não apenas este gráfico mas todos os futuros não são curvas contínuas mas uma coleção de pontos discretos). Para cada instante  $t_n = n dt$ , o incremento pode valer 0 ou 1, com probabilidade maior para o primeiro. Como  $dN(t_n)$  é estocástico, cada vez que rodarmos a simulação, obteremos resultados diferentes. A atividade dinâmica  $N(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} dN(t_i)$ , que é o número de detecções até o instante  $t_n$ , evolui correspondentemente, subindo um "degrau" de altura 1 cada vez que  $dN(t_i) = 1$ .

Por simplicidade, suponha que o estado inicial é puro:  $|\psi(t)\rangle$ . Caso uma emissão seja medida durante  $(t, t + dt)$ , temos que  $dN(t) = 1$ , e o estado evolui para:

$$|\psi_1(t + dt)\rangle = \frac{\hat{M}_1(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle(t)}} = \frac{\hat{a} |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)}}. \quad (4.21)$$

A probabilidade de uma detecção ser realizada durante um dado intervalo  $dt$  será dada por

$$P_1 \equiv \wp dt = \text{Tr}[\mathcal{J}_1(dt)\rho] = \gamma dt \text{Tr}[\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho], \quad (4.8)$$

e a de nada ser detectado, por

$$P_0 = \text{Tr}[\mathcal{J}_0(dt)\rho] = 1 - \wp dt. \quad (4.9)$$

Note que como  $P_0 \approx 1 \gg dt \approx P_1$ , em praticamente todo instante a medição retorna o resultado-nulo, sendo a detecção de um fóton muito menos frequente, com frequência  $\wp$ .

Chamaremos esses pontos de “pulos”, mas frequentemente são encontrados na literatura com nome de “cliques” ou “saltos”. É vital recordar que para a perspectiva operacional essas discontinuidades que ocorrem toda vez que  $k = 1$  não são eventos físicos propriamente ditos, mas mudanças descontínuas *em nosso conhecimento sobre o sistema*.

Na figura 4.1 podemos ver um exemplo de três trajetórias desse tipo. Temos um sistema composto por um qubit evoluindo sob uma Hamiltoniana  $\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x$ . As curvas pretas correspondem à componente excitada ( $|\langle\psi(t)|1\rangle|^2$ ) desse qubit para três simulações diferentes de trajetórias individuais. O algoritmo em si será explicado na seção 4.2, mas, em resumo, a cada intervalo de duração  $dt = 0,001$  unidades de tempo, uma medida é tirada. Na maior parte dos casos, obtemos como resposta o resultado-nulo  $\hat{M}_0(dt)$  e o sistema evolui infinitesimalmente; mas de vez em quando um fóton é detectado ( $\hat{M}_1(dt)$ ) e o sistema imediatamente colapsa para o estado  $|0\rangle$  (ou seja, a sua componente excitada, plotada, pula instantaneamente para zero). Esses pulos são indicados pelas setas verdes. Atendo-nos aos três exemplos da figura 4.1, podemos ter uma noção de quão raras são essas detecções: para simulações de duração de 10 unidades de tempo, temos 10 mil medições, das quais apenas entre 2 e 4 levaram a pulos. Abaixo, em azul, plotamos também a componente excitada do qubit para a evolução não condicionada, calculada por meio da equação de Lindblad, que podemos verificar que é contínua.

Note que, como a evolução descontínua dada por  $\hat{M}_1(dt)$  tem probabilidade proporcional a  $dt$  de ocorrer, se tirarmos o limite  $dt \rightarrow 0$ , a contribuição dela para a evolução não condicionada vai a zero e a contribuição contínua de  $\hat{M}_0(dt)$  passa a dominar. Deste modo, estamos de fato trabalhando com uma trajetória quântica.

onde a contribuição em função de  $dN^2$  do último termo não poderá ser ignorada.

#### 4.1.2. Evolução estocástica da fotodeteção

Como mencionado anteriormente, um sistema que pode espontaneamente emitir fótons pode (dependendo de como é monitorado) se comportar como um PP. Seja  $N(t)$  o número de detecções em uma dada trajetória até o instante  $t$ . Como  $N(t)$  é sempre um inteiro, para todo  $t$ ,  $N(t + dt) = N(t) + dN(t)$ , onde  $dN(t)$  é seu *incremento estocástico*:

$$dN(t)^2 = dN(t), \quad (4.19)$$

$$E[dN(t)] = \langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle(t) = \text{Tr} \left[ \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rho(t) \right]. \quad (4.20)$$

Como esperamos, por (4.19), ou não detectamos nada, e o incremento é zero, ou detectamos uma única emissão de cada vez (se  $dt$  for curto o suficiente), e  $N$  incrementa 1. Do mesmo modo, (4.20) implica que  $E[dN(t)] = P_1$ , a probabilidade de se detectar um fóton.

Na figura 4.2, vemos uma representação gráfica tanto da *atividade dinâmica*  $N(t)$  (como é geralmente chamada) [17] quanto do incremento estocástico  $dN(t)$  para duas simulações distintas. Um intervalo de 10 unidades de tempo é dividido em 100 intervalos  $dt$  de duração 0,1 unidades de tempo (para que a simulação seja boa,  $dt$  tem que ser muito mais curto do que isso. Usamos aqui esse valor para enfatizar que não apenas este gráfico mas todos os futuros não são curvas contínuas mas uma coleção de pontos discretos). Para cada instante  $t_n = n dt$ , o incremento pode valer 0 ou 1, com probabilidade maior para o primeiro. Como  $dN(t_n)$  é estocástico, cada vez que rodarmos a simulação, obteremos resultados diferentes. A atividade dinâmica  $N(t_n) = \sum_{i=0}^{n-1} dN(t_i)$ , que é o número de detecções até o instante  $t_n$ , evolui correspondentemente, subindo um "degrau" de altura 1 cada vez que  $dN(t_i) = 1$ .

Por simplicidade, suponha que o estado inicial é puro:  $|\psi(t)\rangle$ . Caso uma emissão seja medida durante  $(t, t + dt)$ , temos que  $dN(t) = 1$ , e o estado evolui para:

$$|\psi_1(t + dt)\rangle = \frac{\hat{M}_1(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle(t)}} = \frac{\hat{a} |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)}}. \quad (4.21)$$

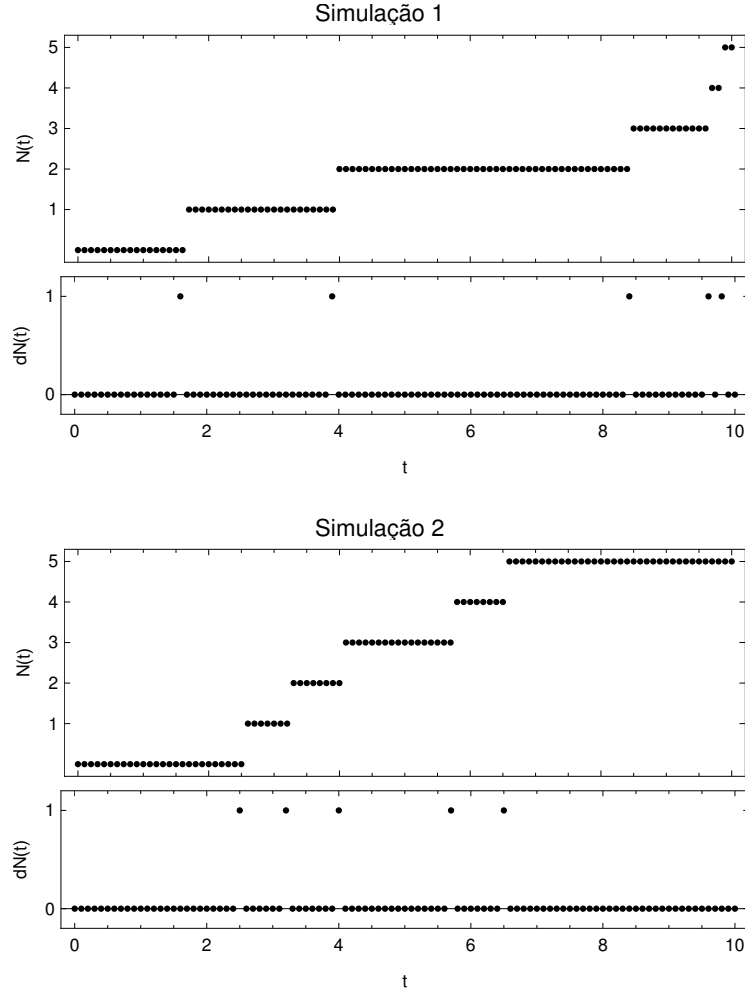


Figura 4.2: Duas simulações distintas da evolução do número de detecções  $N$  e seu incremento  $dN$  para o sistema que será descrito na seção 5.1. O intervalo  $dt$  foi exagerado para facilitar a visualização.

Analogamente, se nada for detectado durante o intervalo de tempo,  $dN(t) = 0$  e:

$$|\psi_0(t + dt)\rangle = \frac{\hat{M}_0(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_0^\dagger(dt) \hat{M}_0(dt) \rangle(t)}} = \left[ \hat{1} - dt \left( i\hat{H} + \frac{\gamma}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\gamma}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) \right) \right] |\psi(t)\rangle, \quad (4.22)$$

onde usamos  $[\langle \hat{M}_0^\dagger(dt) \hat{M}_0(dt) \rangle(t)]^{-\frac{1}{2}} = [1 - dt\gamma \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)]^{-\frac{1}{2}} = \hat{1} - dt\frac{\gamma}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) + \mathcal{O}(dt^2)$ .

Para encontrar a evolução não condicionada, combinamos ambas, utilizando o  $dN(t)$  como condicional:

$$|\psi(t + dt)\rangle = dN(t) |\psi_1(t + dt)\rangle + (1 - dN(t)) |\psi_0(t + dt)\rangle \quad (4.23)$$



Com isso, podemos escrever explicitamente a evolução a partir de uma SDE quântica, a **equação estocástica de Schrödinger** (SSE, em inglês):

$$d|\psi(t)\rangle = \left[ dN(t) \left( \frac{\hat{a}}{\sqrt{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)}} - 1 \right) + (1 - dN(t)) dt \left( -i\hat{H} - \frac{\gamma}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\gamma}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) \right) \right] |\psi(t)\rangle, \quad (4.24)$$

que, aliás, deve-se notar que é não-linear por conta da dependência em  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ . As trajetórias quânticas para o sistema de fotodeteção serão soluções de (4.24).

Podemos simplificar ainda mais essa equação recordando que  $\mathcal{O}(dN(t) dt) = \mathcal{O}(dt^2)$ , e, portanto,  $(1 - dN(t)) dt \approx dt$ :

$$d|\psi(t)\rangle = \left[ dN(t) \left( \frac{\hat{a}}{\sqrt{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)}} - 1 \right) + dt \left( -i\hat{H} - \frac{\gamma}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\gamma}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) \right) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (4.25)$$

Essa forma será a empregada nas simulações numéricas nas próximas seções.

Por fim, reescrevemos (4.24) para uma matriz densidade  $\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ . Primeiro, por simplicidade, definamos:

$$f(t) \equiv -i\hat{H} - \frac{\gamma}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\gamma}{2} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t), \quad (4.26)$$

$$g(t) \equiv \frac{\hat{a}}{\sqrt{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)}} - 1. \quad (4.27)$$

Recordando-nos de usar a regra da cadeia “modificada” (4.18), temos:

$$d\rho(t) = (dt f(t)) \rho(t) + \rho(t) (dt f(t))^\dagger + (dN(t) g(t)) \rho(t) (dN(t) g(t))^\dagger. \quad (4.28)$$

Substituindo  $f$ ,  $g$  e seus respectivos complexos conjugados, temos:

$$d\rho(t) = dt \left( -i[\hat{H}, \rho(t)] - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho(t) \} + \gamma \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \rho(t) \right) + dN \left( \frac{\hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t)} - \rho(t) \right). \quad (4.29)$$

Por fim, analisando a evolução **não** condicionada, tiramos a média da SSE,  $E[d\rho(t)]$ . Note que com isso removemos a dependência em  $dN$ , pois, reescrevendo (4.20) para matrizes

densidade, sendo  $F$  uma função qualquer:

$$\mathbb{E}[dN(t)F(\rho(t))] = dt \mathbb{E}[\gamma\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle(t)F(\rho(t))], \quad (4.30)$$

temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d\rho(t)] &= dt \left( -i[\hat{H}, \rho(t)] - \frac{\gamma}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho(t)\} + \gamma\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle(t)\rho(t) + \gamma\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \gamma\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle(t)\rho(t) \right) \\ &= dt \left[ -i[\hat{H}, \rho(t)] + \gamma\left(\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho(t)\}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, de fato como esperávamos, a SSE não condicionada segue a equação de Lindblad.

### 4.1.3. Múltiplos operadores de pulo

Antes de prosseguir, devemos generalizar essas equações para múltiplos operadores de pulos. Primeiramente, cada  $\hat{M}_k$ ,  $k \geq 1$ , possui seu incremento estocástico correspondente tal que:

$$dN_k(t) dN_l(t) = dN_k(t)\delta_{kl}, \quad (4.32)$$

$$\mathbb{E}[dN_k(t)] = \text{Tr} \left[ \hat{M}_k^\dagger(dt)\hat{M}_k(dt)\rho(t) \right], \quad (4.33)$$

onde  $\hat{M}_k(dt) = \sqrt{dt} \hat{c}_k$ , para cada operador de pulo  $\hat{c}_k$ . Como a evolução é linear, a SSE final é soma das SSEs para cada pulo:

$$d|\psi(t)\rangle = \sum_k \left[ dN_k(t) \left( \frac{\hat{c}_k}{\sqrt{\langle\hat{c}_k^\dagger\hat{c}_k\rangle(t)}} - 1 \right) + dt \left( -i\hat{H} - \frac{\gamma}{2}\hat{c}_k^\dagger\hat{c}_k + \frac{\gamma}{2}\langle\hat{c}_k^\dagger\hat{c}_k\rangle(t) \right) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (4.34)$$

Analogamente, o operador de resultado-nulo se torna:

$$\hat{M}_0 = \hat{1} - dt \left( i\hat{H} + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \right). \quad (4.35)$$

## 4.2. Algoritmo da simulação numérica

Todas as simulações que serão apresentadas nos próximos capítulos foram realizadas utilizando a biblioteca *Melt!* [35] do *Wolfram Mathematica*. Para um intervalo de tempo  $dt$  finito e fixo, o estado condicionado do sistema é atualizado a cada passo pela medida que foi realizada, como na equação (4.1) (lembrando que devemos incluir o resultado-nulo entre os operadores de medição). Também trabalharemos estritamente com estados puros, pois reduzem enormemente a quantidade de memória necessária e operações que o computador precisa realizar (para um sistema com espaço de Hilbert de  $N$  dimensões e duração  $T$  passos, serão  $N^2T$  operações no caso vetorial, mas  $N^4T$  no caso matricial). Este método de solução numérica já é empregado desde os anos 90 para resolver esse tipo de problema, principalmente para sistemas de ótica quântica, como se pode verificar nas referências [8, 36, 37].

A maneira mais eficiente de realizar essas simulações consiste em fazer uma evolução não normalizada do sistema durante o regime de não-deteção [17]. Como já mencionado, a evolução do sistema em função do resultado-nulo (4.35) é muito próxima de ser — *mas não é* — unitária. O modelo será melhor explicado no próximo capítulo (na seção 5.1), mas, em resumo, é constituído por dois qubits que interagem entre si por meio de uma Hamiltoniana  $\hat{H}$  e podem trocar excitações com um ambiente por meio de operadores de pulso  $\hat{c}_1$  e  $\hat{c}_2$ . O estado do sistema é dado por  $|\psi(t)\rangle = |i\rangle_{\text{qubit 1}} \otimes |j\rangle_{\text{qubit 2}} \equiv |ij\rangle$ . Substituindo os operadores de pulso  $\hat{c}_i$ 's na equação (4.35) pelos seus valores na simulação (que serão explicados seção 5.1):

$$\hat{M}_0 \equiv \hat{1} - dt \left[ i\hat{H} + \frac{1}{2}(\gamma_1 \hat{\sigma}_-^1 \hat{\sigma}_+^1 + \gamma_2 \hat{\sigma}_+^j \hat{\sigma}_-^j) \right], \quad j = 1, 2, \quad (4.36)$$

$$\hat{M}_1 \equiv \sqrt{dt} \gamma_1 \hat{\sigma}_+^1, \quad (4.37)$$

$$\hat{M}_2 \equiv \sqrt{dt} \gamma_2 \hat{\sigma}_-^j, \quad j = 1, 2, \quad (4.38)$$

onde os  $\gamma_i$ 's são constantes de acoplamento com o ambiente e  $\hat{\sigma}_i$  as matrizes de Pauli:

$$\hat{\sigma}_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

lembrando que  $\hat{\sigma}_i^1 \equiv \hat{\sigma}_i \otimes \hat{1}$  e  $\hat{\sigma}_i^2 \equiv \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_i$ , onde  $\hat{1}$  é o operador identidade. O estado dos qubits é escrito na base dos autoestados de  $\hat{\sigma}_z$ :  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , onde  $|0\rangle$  é o estado fundamental e  $|1\rangle$  é o excitado.  $\hat{M}_1$  corresponde a o que é conhecido como um *jump-up* do qubit 1: um pulo do estado fundamental para o excitado, dado que  $\hat{\sigma}_+ |0\rangle = |1\rangle$ , *i.e.* o qubit 1 *ganhou* uma excitação do ambiente enquanto o qubit 2 permanece inalterado.  $\hat{M}_2$  é um *jump-down*, pois  $\hat{\sigma}_- |1\rangle = |0\rangle$ , podendo agir tanto no qubit 1 quanto no 2 (indicado pelo índice  $j$ ), fazendo o qubit  $j$  perder uma excitação para o ambiente enquanto que o outro permanece inalterado.  $\hat{M}_0$  é o operador de resultado-nulo correspondente.

Se escrevermos a Hamiltoniana efetiva que a geraria, ela seria:

$$\tilde{H}_e = \hat{H} - \frac{i}{2}(\gamma_1 \hat{\sigma}_-^1 \hat{\sigma}_+^1 + \gamma_2 \hat{\sigma}_+^j \hat{\sigma}_-^j), \quad (4.40)$$

que, por conta da unidade imaginária  $i$ , não é Hermitiana. De fato, o traço da matriz densidade cai exponencialmente com uma taxa de  $(\gamma_1 + \gamma_2)/2$  se não for continuamente normalizado. Podemos utilizar esse decaimento para determinar o instante em que um pulo ocorre, por meio do método descrito a seguir.

Utilizamos a função `QuantumJumpUnravelling` da biblioteca *Melt!*. Ela primeiro gera um número aleatório  $R$  entre 0 e 1, que será o nosso corte. Em seguida, resolve iterativamente a equação:

$$|\tilde{\psi}(t + dt)\rangle = \tilde{U}_e(dt) |\psi(t)\rangle, \quad (4.41)$$

onde  $\tilde{U}_e(dt)$  é a expansão por Taylor de  $e^{-i\tilde{H}_e dt}$  até 4ª ordem. Quando a norma de  $|\tilde{\psi}(T)\rangle$  for menor do que  $R$ , temos um pulo. *Qual* pulo ocorrerá é determinado por uma escolha aleatória ponderada pelo valor esperado de cada pulo:  $\langle \tilde{\psi}(T) | \hat{M}_i^\dagger \hat{M}_i | \tilde{\psi}(T) \rangle$ . Note, portanto, que quanto mais próximo o estado (normalizado e reduzido) do qubit em interação com o banho estiver de  $|0\rangle$ , maior a sua chance de fazer um *jump-up*  $\hat{M}_1$ , enquanto que quanto mais próximo estiver de  $|1\rangle$ , maior a probabilidade de um *jump-down*  $\hat{M}_2$ .

A função `QuantumJumpUnravelling` retorna duas listas: a primeira contém o estado (normalizado) do sistema em cada instante  $t_i$  na base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  (*i.e.*  $|00\rangle$  corresponde aos dois qubits no estado fundamental,  $|01\rangle$  ao qubit 1 no estado fundamental e o qubit 2 no excitado, etc.); a segunda contém apenas em quais  $t_i$ 's ocorreu um

pulo, e qual dentre os dois pulos ocorreu.

### 4.2.1. Cálculo analítico da evolução não condicionada e do estado estacionário

Em muitos casos também será interessante estudar a evolução não condicionada do sistema, *i.e.* a média de todas as trajetórias possíveis.

Faremos isso utilizando a função Liouvillian do *Melt!*. O primeiro problema encontramos tentando encontrar o operador de evolução temporal  $\mathcal{U}(t) = e^{\mathcal{L}t}$ , visto que o Liouvilliano  $\mathcal{L}$ , como ele é um *superoperador*, atua pela esquerda e pela direita da matriz densidade. Podemos, no entanto, simplificar esse procedimento empregando o método de **vetorização** [20], isto é, reescrever uma matriz  $n \times n$  como um vetor de dimensão  $n^2$ .

*E.g.:*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{M} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Isso pois, para  $A$  e  $B$  matrizes,

$$\overrightarrow{(AMB)} = (B^T \otimes A)\vec{M}. \quad (4.43)$$

Ou seja, podemos reescrever duas matrizes  $n \times n$ , que "sanduícham" uma terceira  $M$ , como uma única matriz  $n^2 \times n^2$  multiplicando um vetor  $n^2$ ,  $\vec{M}$ .

Portanto, para o um sistema de dois qubits e operadores de pulo  $\hat{c}_k$ , podemos, reescrever o Liouvilliano  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} \cdot = -i[\hat{H}, \cdot] + \sum_k \gamma_k (\hat{c}_k^\dagger \cdot \hat{c} - \frac{1}{2} \{ \hat{c}_k^\dagger \hat{c}, \cdot \}) \quad (4.44)$$

como uma matriz  $16 \times 16$ . Deste modo, vetorizando a matriz densidade, encontramos seu valor para qualquer instante de tempo:

$$\vec{\rho}(t) = e^{\mathcal{L}t} \vec{\rho}(0) \quad (4.45)$$

onde a exponencial da matriz é feita analiticamente. “Des-vetorizando”  $\vec{\rho}(t)$ , recuperamos a matriz densidade.

O estado estacionário do sistema aberto  $\rho_{ss}$  é encontrando simplesmente calculando o autovetor normalizado  $\vec{\rho}_{ss}$  de  $\mathcal{L}$ .

### 4.3. Distribuição do tempo de espera

Um dos parâmetros que mais esclarece a dinâmica aberta de um sistema é a distribuição de tempo de espera  $W(t, k | q, \rho)$  (mais conhecida pela sigla em inglês: **WTD**). Ela é dada pela probabilidade de ocorrer um pulo  $k$  após tempo  $t$  dado que em  $t_0 = 0$  houve o pulo  $q$ . Expliquemos com um exemplo, que será analisado em detalhes na seção 5.1: nos sistemas de dois qubits (fig. 5.2),  $\hat{M}_1$  é o operador de *jump-up*, ou seja, o sistema absorve uma excitação do ambiente. A função  $W(t, \hat{M}_1 | \hat{M}_1, |\psi_0\rangle)$  dá a probabilidade que após um *jump-up* ( $\hat{M}_1$ ), o sistema evolua sem realizar nenhum pulo por um tempo  $t$  antes que um segundo *jump-up* torne a ocorrer (sendo que o estado do sistema antes do primeiro pulo era  $|\psi_0\rangle$ ). Ou seja, dá a *distribuição* do intervalo de tempo entre dois pulos específicos [20].

Para calcular a WTD, precisamos separar a evolução entre os pulos da evolução sem-pulos (*no-jump*, em inglês). Voltando à equação de Lindblad (3.62), que descreve a evolução *não condicionada* de um sistema aberto, e a definição de saltos quânticos (2.30) (cuja notação simplificaremos para  $\mathcal{J}[\hat{c}_k] \equiv \mathcal{J}_k$ ), que descrevem a evolução *condicionada* do sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) &= -i[\hat{H}, \rho] - \sum_k -\frac{1}{2}\{\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \rho\} + \sum_k \hat{L}_k \rho \hat{L}_k^\dagger \\ &= \mathcal{L}_0 \rho + \sum_k \mathcal{J}_k \rho \end{aligned} \quad (4.46)$$

$\mathcal{L}_0$  é o **superoperador de evolução sem-pulo**:

$$\mathcal{L}_0 \rho = -i(\tilde{H}_e \rho - \rho \tilde{H}_e^\dagger), \quad (4.47)$$

onde  $\tilde{H}_e$  é uma Hamiltoniana efetiva (4.40) não Hermitiana.  $\mathcal{L}_0$  descreve a evolução do

sistema condicionada pelo fato de que nenhum pulo está ocorrendo. E.g.

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0) \quad (4.48)$$

é o estado final dado que sabemos que *nenhum* pulo ocorreu durante o intervalo de 0 a  $t$ . Note que essa evolução depende da nossa escolha dos canais que desejamos monitorar. Mudando os operadores de pulo  $\hat{c}_k$ , muda, naturalmente, a evolução sem-pulo.

Deste modo, podemos decompor a dinâmica de uma evolução qualquer pela série de Dyson não normalizada [20]:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) = & e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0) + \sum_k \int_0^{t_1} dt_1 e^{\mathcal{L}_0(t_1-t)} \mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho(0) \\ & + \sum_{k,q} \int_{t_1}^{t_2} dt_2 \int_0^{t_1} dt_1 e^{\mathcal{L}_0(t_2-t_1)} \mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0(t_1-t)} \mathcal{J}_q e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho(0) + \dots, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou seja: temos a contribuição da evolução dado que não ocorreu nenhum pulo, somada à dado que ocorreu um pulo, somada à para dois pulos, etc. Para cada quantidade de pulos, somamos a contribuição de todos os pulos possíveis  $k$  e integramos sobre todos os instantes intermediários  $t_i$  em que eles poderiam acontecer.

Como o que nos interessa é saber o intervalo entre dois pulos, definimos os estado inicial  $\rho(0)$  como um estado imediatamente após um pulo qualquer  $q$ :  $\mathcal{J}_q \rho(0)$ . A distribuição final pode ser condicionada a  $q$  e  $\rho(0)$  ou apenas ao pulo, como iremos ver.

Tendo tudo isso em mente, podemos agora encontrar uma equação para a WTD (não normalizada):

$$W(t, k | q, \rho) = \text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \mathcal{J}_q \rho]. \quad (4.50)$$

Como já dito, essa equação dá a probabilidade de um próximo pulo  $k$  acontecer em um instante  $t$ . Esperamos, portanto, que

$$\sum_k \int_0^\infty dt W(t, k | q, \rho) = 1 \quad (4.51)$$

Ou seja, que para qualquer estado inicial seguido de qualquer pulo  $q$ , inevitavelmente algum pulo  $k$  vai acontecer após algum intervalo finito de tempo  $t$ . No entanto, nos

deparamos com primeiro problema: nem toda WTD é normalizável.

Vamos começar com uma WTD mais geral:  $W(t, k | \rho)$ , em que o estado inicial  $\rho$  não precisa ser o resultado de um pulso  $q$ , e definamos a probabilidade de nenhum pulso ocorrer como o valor esperado do primeiro termo de (4.49):

$$P_{\text{no}}(t) \equiv \text{Tr}[e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)]. \quad (4.52)$$

Com esse termo, conseguimos normalizar a evolução sem-pulso:

$$\rho_{\text{no}}(t) = \frac{e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)}{\text{Tr}[e^{\mathcal{L}_0 t} \rho(0)]}. \quad (4.53)$$

Note que, agora, a WTD se escreve:

$$W(t, k | \rho) = \text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \rho]. \quad (4.54)$$

Podemos definir  $W(t) \equiv \sum_k W(t, k | \rho)$ :

$$\begin{aligned} W(t) &= \text{Tr} \left[ \sum_k \mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \rho \right] \stackrel{(i)}{=} \text{Tr}[(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) e^{\mathcal{L}_0 t} \rho] \\ &\stackrel{(ii)}{=} - \text{Tr}[\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t} \rho] = - \frac{dP_{\text{no}}}{dt} \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde em (i) usamos (4.46) e em (ii) que  $\text{Tr}[\mathcal{L}\rho] = 0$  para todo  $\rho$ . Integrando os dois lados no tempo para obter (4.51):

$$\int_0^\infty dt W(t) = P_{\text{no}}(t) \Big|_0^\infty = 1 - P_{\text{no}}(\infty), \quad (4.56)$$

onde usamos que  $P_{\text{no}}(0) = 1$ .  $P_{\text{no}}(\infty)$  corresponde, justamente, à probabilidade de nunca ocorrer nenhum pulso. Assumiremos de agora em diante que para tempo suficientemente longo, algum pulso inevitavelmente acontecerá, *i.e.*  $P_{\text{no}}(\infty) = 0$  (é válido para os modelos que iremos simular, descritos na seção 5.1).

Se este for o caso, temos então que  $\mathcal{L}_0$  é inversível, pois:

$$\int_0^\infty dt W(t) = - \int_0^\infty dt \text{Tr}[\mathcal{L}_0 e^{\mathcal{L}_0 t} \rho] = 1 \implies \int_0^\infty dt e^{\mathcal{L}_0 t} = -\mathcal{L}_0^{-1}. \quad (4.57)$$



Garantido que a WTD é normalizável, substituímos esse resultado em (4.50) e normalizando o estado após o primeiro pulso, obtemos:

$$W(t, k | q, \rho) = - \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}. \quad (4.58)$$

Evidente que podemos expandir a WTD para uma série maior de pulsos. Por exemplo, a probabilidade de uma série de  $n$  pulsos  $k_i$ , cada um após um intervalo de tempo correspondente  $t_i$ , é:

$$W(t_1, k_1, \dots, t_n, k_n | q, \rho) = - \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_{k_n} e^{\mathcal{L}_0 t_n} \dots \mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}. \quad (4.59)$$

Existem, no entanto, casos em que a essa equação pode ser bastante simplificada: quando temos um **processo renovável**, *i.e.* quando, após um pulso, o sistema não tem nenhuma memória do estado que o precedeu. Na prática, independente do estado  $\rho$  do sistema antes de um dado pulso  $k$ , o estado depois dele é sempre o mesmo:

$$\frac{\mathcal{J}_k \rho}{\text{Tr}[\mathcal{J}_k \rho]} = \rho_k, \quad \forall \rho \quad (4.60)$$

Por exemplo, para um sistema de apenas um qubit, se  $\hat{c}_1 = \sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_+$  e  $\hat{c}_2 = \sqrt{\gamma_2} \hat{\sigma}_-$ , temos que para qualquer estado inicial:

$$\rho_1 \equiv \frac{\mathcal{J}_1 \rho}{\text{Tr}[\mathcal{J}_1 \rho]} = \frac{\gamma_1 \hat{\sigma}_+ \rho \hat{\sigma}_-}{\gamma_1 \text{Tr}[\hat{\sigma}_+ \rho \hat{\sigma}_-]} = \frac{\langle 0 | \rho | 0 \rangle | 1 \rangle \langle 1 |}{\langle 0 | \rho | 0 \rangle \text{Tr}[| 1 \rangle \langle 1 |]} = | 1 \rangle \langle 1 |, \quad (4.61)$$

e, analogamente  $\rho_2 = | 0 \rangle \langle 0 |$ .

Nestes casos, podemos reduzir enormemente o número de operações a serem realizadas para calcular (4.59), pois, por exemplo:

$$W(t, k | q, \rho) = \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]} = \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \rho_q] \text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]} = \text{Tr}[\mathcal{J}_k e^{\mathcal{L}_0 t} \rho_q], \quad (4.62)$$

que pode ser generalizado para  $n$  pulos:

$$\mathcal{J}_{k_n} e^{\mathcal{L}_0 t_n} \dots \mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \underbrace{\mathcal{J}_q \rho}_{\rho_q \text{ Tr}[\mathcal{J}_q \rho]} \quad (4.63)$$

$$\underbrace{\rho_{k_1} \text{ Tr}[\mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho_q] \text{ Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}_{\rho_{k_n} \text{ Tr}[\mathcal{J}_{k_n} e^{\mathcal{L}_0 t_n} \rho_{k_{n-1}}] \dots \text{ Tr}[\mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \rho_q] \text{ Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}$$

e agora fica evidente a vantagem, pois (4.59) se reduz a:

$$W(t_n, k_n, \dots | q) = \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_{k_n} e^{\mathcal{L}_0(t_n - t_{n-1})} \dots \mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 t_1} \mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}.$$

$$= \text{Tr}[\rho_n] \text{Tr}[\mathcal{J}_{k_n} e^{\mathcal{L}_0 \tau_N} \rho_{k_{N-1}}] \dots \text{Tr}[\mathcal{J}_{k_1} e^{\mathcal{L}_0 \tau_1} \rho_{k_0}] \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_q \rho]}$$

$$= W(t_n, k_n | k_{n-1}) \dots W(t_1, k_1 | q) \quad (4.64)$$

(onde removemos a dependência em  $\rho$ , pois a WTD não está mais condicionada a ele). Note que o que encontramos é um processo de Markov, tal qual os apresentados na seção 3.2.

# 5

## Resultado das simulações de saltos quânticos para um sistema de dois qubits

### 5.1. Modelo geral

Os dois sistemas simulados neste capítulo seguem uma estrutura semelhante: consistem de dois qubits conectados a dois banhos, com taxas de acoplamento fixas no tempo. Definiremos nesta seção uma série de convenções para padronizar a leitura dos gráficos. Exceto quando indicado, elas também serão válidas nos próximos capítulos.

#### 5.1.1. Convenções, notação e definições

Assim como na seção 4.2, sempre a seguinte notação:  $\hat{\sigma}_i^j$  consiste na matriz de Pauli  $i$  no espaço de Hilbert do qubit  $j$  e o operador identidade no espaço de Hilbert do outro qubit: e.g.  $\hat{\sigma}_z^1 \equiv \hat{\sigma}_z \otimes \hat{1}$ . Ademais,  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  são os autoestados de  $\hat{\sigma}_z$ , com autovalor 1 e  $-1$ , respectivamente. Para o nosso caso,  $|1\rangle$  corresponde ao estado excitado do qubit e  $|0\rangle$  ao estado fundamental.  $|ij\rangle \equiv |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$ , assim, e.g.  $|10\rangle$  corresponde ao estado do sistema em que o qubit 1 está excitado e o qubit 2 no estado fundamental. Todos os gráficos de evolução de um sistema, tanto de trajetórias quanto de evolução não condicionada, são tais que o eixo  $x$  é o tempo e o eixo  $y$  são as componentes do estado do sistema  $|\psi(t)\rangle$ . Quando estiver escrito na legenda  $|ij\rangle$ , é apenas uma abreviação de  $|\langle\psi(t)|ij\rangle|^2$  (ou  $\langle ij|\rho(t)|ij\rangle$  para estado misto).

A dinâmica interna (unitária) é dada pela Hamiltoniana da cadeia XXZ de 2 qubits:

$$\hat{H} = h(\hat{\sigma}_z^1 - \hat{\sigma}_z^2) + \alpha(\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2), \quad (5.1)$$

onde  $2h$  corresponde à diferença entre as energias internas dos dois qubits e  $\alpha$  é a constante de acoplamento entre eles. Em todos os modelos deste e dos próximos capítulos, exceto quando explicitamente indicado, as constantes foram fixadas em  $h = \alpha = 1/2$  (visto que o que de fato nos interessa é a interação com o banho, não as particularidades da dinâmica interna).

Recordando-nos da SSE de fotodeteção, eq. (4.24), deve-se notar que ela preserva estados puros, e, portanto, se escrevermos o estado do sistema na base dos autoestados da energia interna:

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|00\rangle + b(t)|01\rangle + c(t)|10\rangle + d(t)|11\rangle, \quad (5.2)$$

a Hamiltoniana interna age no sistema tal que as componentes  $a(t)$  e  $d(t)$  serão constantes, enquanto  $b(t)$  e  $c(t)$  farão uma oscilação de Rabi. Em função da nossa escolha do *unravelling* (apresentada logo a seguir), esse comportamento também é válido para a Hamiltoniana efetiva. Fisicamente, o que podemos ver é que essa Hamiltoniana *preserva excitações totais do sistema*, *i.e.* se começamos com nenhum qubit excitado ou ambos excitados, nada acontece, mas se apenas um deles estiver excitado, essa excitação vai oscilar entre ambos. Na figura 5.1 podemos ver a evolução unitária (de um sistema fechado) que

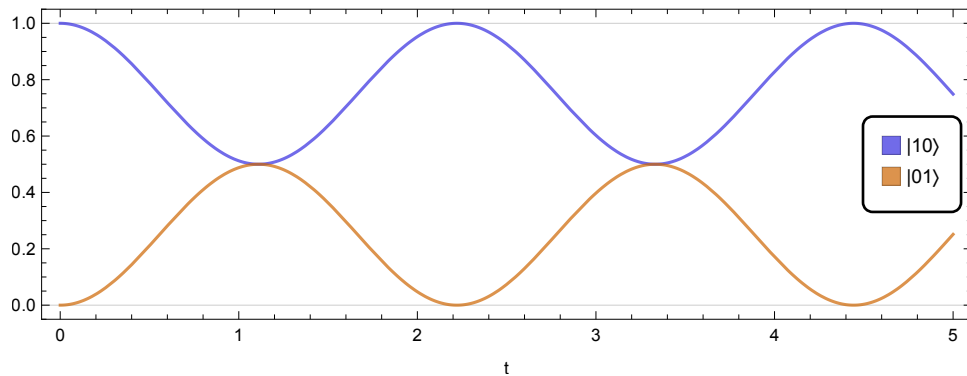


Figura 5.1: Evolução no tempo dada pela Hamiltoniana (5.1) das componentes  $|\langle\psi(t)|ij\rangle|^2$  (eixo  $y$ ) do estado de um sistema *fechado* cujo estado inicial é  $|\psi(0)\rangle = |10\rangle$ . As componentes não plotadas ( $|11\rangle$  e  $|00\rangle$ ) permanecem nulas.

iniciou em um estado em que o qubit 1 se encontrava excitado e o qubit 2 não. Note que caso o estado inicial fosse o oposto, as duas curvas trocariam de lugar.

Deste modo, mantendo um registro de quantas excitações estão dentro do sistema em cada momento (visto que podemos identificar quando entram e quando saem), é possível inferir o estado mesmo dos qubits não sendo diretamente medidos. Esse é o motivo de termos escolhido plotar as componentes do estado do sistema na base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  nos gráficos, visto que o estado pode apenas estar em um de três regimes:  $|00\rangle$  (zero excitações no sistema), uma sobreposição de  $|01\rangle$  e  $|10\rangle$  (uma excitação) ou  $|11\rangle$  (duas excitações). Provaremos na seção 5.3 que para simulações longas o suficiente este necessariamente é o caso, mas já nos gráficos da seção 5.2.1 é possível ver que mesmo começando em um estado em superposição de estados com diferentes números de excitações, o sistema tende com o tempo a chegar em um estado com número definido de excitações. Em nossas simulações, por consistência sempre escolhemos  $|00\rangle$  como estado inicial (exceto quando indicado).

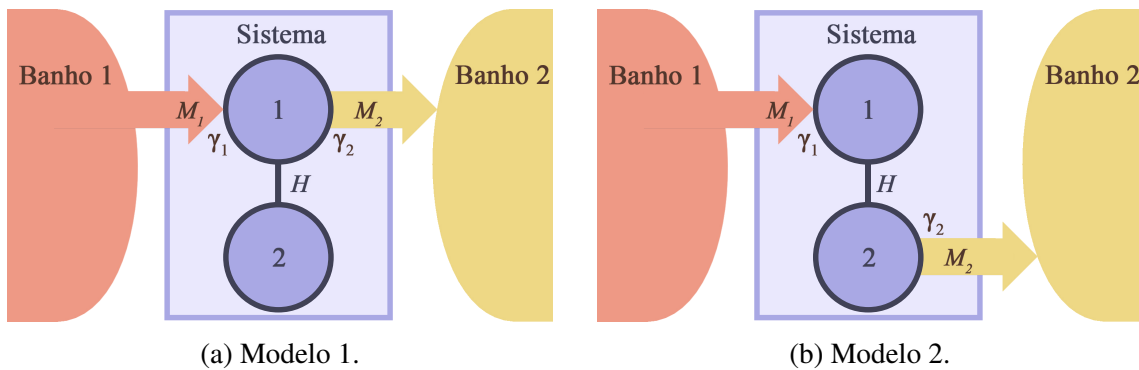


Figura 5.2: Esquema dos set-ups para processos pontuais.

O sistema está conectado a dois banhos. A interação entre os banhos e o sistema é um processo de Markov homogêneo, usando todas as aproximações para a equação de Lindblad local descritas na seção 3.4. Do banho 1, o sistema pode apenas ganhar pacotes de energia, que podem ser dissipados apenas para o banho 2.<sup>1</sup> Os banhos 1 e 2 têm com o sistema, respectivamente, constantes de acoplamento  $\gamma_{1,2}$ . Apresentaremos dois set-ups distintos: no primeiro, que chamaremos de **modelo 1**, apenas o qubit 1 interage com *ambos* os banhos, o qubit 2 permanecendo isolado do ambiente (ver figura 5.2a); no

<sup>1</sup>Evidente que isso é apenas uma convenção para padronizar os gráficos e simplificar sua legibilidade, e não uma imposição física de qualquer tipo.

segundo, batizado de **modelo 2**, as excitações “fluem através” do sistema, pois o qubit 1 apenas ganha excitações e o qubit 2 apenas as perde (ver figura 5.2b). Os dois modelos são mutuamente exclusivos; nunca apresentaremos uma trajetória que comece no modelo 1 e termine no modelo 2, por exemplo.

Os dois operadores de pulo são:

$$\hat{c}_1 \equiv \sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_+^1 \quad \text{excitação } \textit{entra} \text{ no sistema pelo qubit 1,} \quad (5.3)$$

$$\hat{c}_2 \equiv \sqrt{\gamma_2} \hat{\sigma}_-^j \quad \text{excitação } \textit{sai} \text{ do sistema pelo qubit } j = 1,2, \quad (5.4)$$

onde  $j = 1$  para o set-up do modelo 1 e  $j = 2$  para o modelo 2. Como o sistema só pode se encontrar em um dos dois modelos, optamos por não acrescentar o índice  $j$  aos operadores de pulo  $\hat{c}_2$  para evitar excesso de notação redundante, visto que nunca as duas variantes de  $\hat{c}_2$  atuarão em um mesmo sistema. Sempre estará claro qual modelo está sendo simulado. Os operadores de medida generalizada (eq. 2.23) serão dados por:

$$\hat{M}_i(dt) \equiv \sqrt{dt} \hat{c}_i, \quad i = 1,2. \quad (5.5)$$

Como o passo  $dt$  será constante para todas as simulações ( $dt = 0.001$ ), poderemos omitir a dependência dos operadores de pulo ( $\hat{M}_i(dt) \rightarrow \hat{M}_i$ ).  $\hat{M}_1$  e  $\hat{M}_2$  serão chamados por seus nomes em inglês: **jump-up** e **jump-down**, respectivamente. Estes operadores também trabalham como operadores de medição, visto que somos capazes de determinar com absoluta certeza *quando* um pulo ocorre e *qual* ocorre. As constantes de acoplamento  $\gamma_i$  contém dentro de si toda a informação sobre o banho e a intensidade da interação com o sistema.

## 5.2. Resultados das simulações

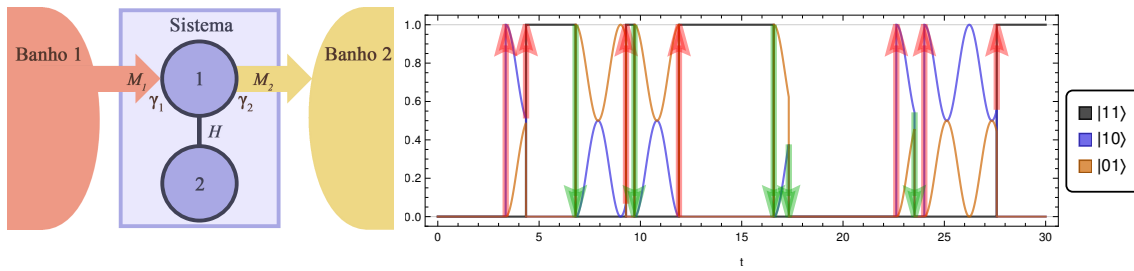
### 5.2.1. Trajetórias quânticas do sistema de dois qubits

#### Modelo 1

Na figura 5.3b, vemos a simulação de uma trajetória particular para dois banhos com a mesma temperatura. Explicaremos como ler este gráfico em detalhes, para facilitar tam-

à Taysa: a função ListLinePlot do mathematica (lembrando que esses gráficos são uma coleção de pontos muito próximos) não lida bem com linha tracejada ou pontilhada. Minha intenção inicial era fazer o que você sugeriu, mas não ficava bom.

## Capítulo 5. Resultado das simulações de saltos quânticos para um sistema de dois qubits



(a) Set-up do modelo 1.

(b) Trajetória do estado do sistema no modelo 1.

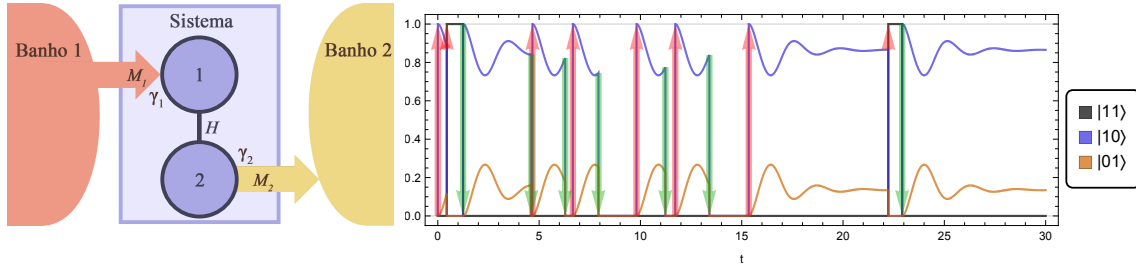
Figura 5.3: Uma trajetória para  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ . Recordamos que as curvas (eixo  $y$ ) indicam as componentes do vetor de estado na base dos autoestados da energia interna do sistema (*i.e.* qubit 1 e qubit 2):  $|\langle \psi(t) | ij \rangle|^2$ , para  $i, j = 0, 1$  indicados na legenda. Foram plotadas levemente transparentes para que se possa ver quando se sobrepõe no zero (reiteramos que o sistema pode apenas estar em 3 regimes:  $|\psi\rangle = |11\rangle$ ,  $|\psi\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle$  ou  $|\psi\rangle = |00\rangle$ ). Exceto quando explicitamente mencionado, não plotaremos nunca a ocupação do estado  $|00\rangle$ , para facilitar a leitura.

bém a leitura dos próximos. Recordamos que no modelo 1, todo salto ocorre no qubit 1 (figura 5.3a). Portanto, se detectamos uma excitação entrando no sistema, sabemos que no instante imediatamente posterior, o qubit 1 vai se encontrar no estado excitado, independente do estado do qubit 2. Temos aqui um sistema que começa no estado  $|\psi(0)\rangle = |00\rangle$  (não plotado) e, em  $t = 3,3$ , recebe uma excitação do banho 1, fazendo um *jump-up* (seta vermelha) e colapsando no estado  $|\psi(t)\rangle = |10\rangle$  (linha azul). Então evolui, oscilando com frequência próxima à<sup>2</sup> de Rabi  $\Omega$ , com a amplitude de  $|10\rangle$  oscilando entre 1 e 0,5, e a de  $|01\rangle$  (linha laranja) oscilando entre 0,5 e 0. Em  $t = 4,3$ , recebe outra excitação, colapsando para o estado  $|\psi(t)\rangle = |11\rangle$  (linha preta), que permanece constante até, em  $t = 6,9$ , perder uma excitação, fazendo um *jump-down* (seta verde) para o estado  $|01\rangle$ . Note, no entanto, que agora as amplitudes de oscilação trocam: a de  $|10\rangle$  oscila entre 0,5 e 0, e a de  $|01\rangle$  oscila entre 1 e 0,5. Em  $t = 9,3$  temos outro *jump-up*, e assim sucessivamente.

Evidente que essa é apenas uma trajetória particular. Rodando outra vez a simulação, com uma semente para a geração de números aleatórios diferente, chegaremos a pulos em instantes distintos.

<sup>2</sup>“Próximo  $a$ ” pois seria igual à oscilação de Rabi unicamente se o sistema fosse fechado.

## Modelo 2



(a) Set-up do modelo 2.

(b) Trajetória do estado do sistema no modelo 2.

Figura 5.4: Uma trajetória para  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma = 1/2$ . Recordamos que o eixo  $y$  corresponde às componentes do vetor de estado:  $|\langle \psi(t) | ij \rangle|^2$ , para  $i$  e  $j$  indicados na legenda. Isso continuará válido para todos os próximos gráficos de trajetória e evolução não condicionada desse capítulo.

Avaliemos agora o comportamento das trajetórias do modelo 2. Este set-up se parece mais com as cadeias de qubits entre banhos que são comumente estudadas em trabalhos de termodinâmica quântica, como nas referências [38–40], por exemplo.

A primeira diferença clara que se nota entre este set-up e o anterior é que consistentemente o qubit 1 se encontra em um estado mais excitado que o qubit 2 (*i.e.*  $|\langle \psi(t) | 10 \rangle|^2 > |\langle \psi(t) | 01 \rangle|^2$  para todo  $t$ ). Este comportamento é consequência do fato de que agora o estado final após ambos os pulsos é o mesmo:

$$\hat{c}_1 |00\rangle = |10\rangle, \quad (5.6)$$

$$\hat{c}_2 |11\rangle = |10\rangle, \quad (5.7)$$

enquanto que para o set-up do modelo 1, eram distintos:

$$\hat{c}_1 |00\rangle = |10\rangle, \quad (5.8)$$

$$\hat{c}_2 |11\rangle = |01\rangle. \quad (5.9)$$

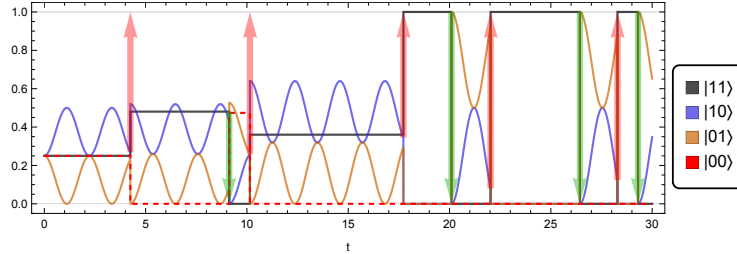
Ou seja: existe uma degenerescência no estado intermediário do modelo 1 que não está presente no modelo 2. Isso impactará sua distribuição de tempos de espera, como veremos na seção 5.3.1.

Também podemos facilmente notar no modelo 2 que as curvas no estado intermediário tendem a um estado estacionário, em contraste com o modelo 1, que na figura 5.4b parece

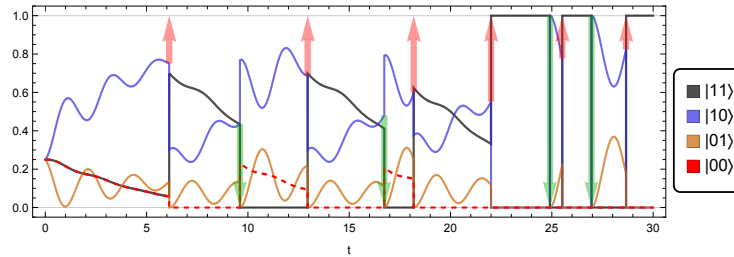


oscilar indefinidamente. Discutiremos isso mais a fundo nas próximas seções.

### Dependência no estado inicial



(a) Trajetória no modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Trajetória no modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.5: Trajetórias  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$  com estado inicial  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ . Plotamos a componente  $|00\rangle$  pois aqui contribui para os estados antes de pulso repetidos.

Começemos tentando definir se esses modelos se comportam como processos renováveis, ou seja: se suas evoluções não dependem do estado inicial. Começando a simulação em um outro estado qualquer. Podemos ver os resultado nas figuras 5.5, onde iniciamos no estado maximamente misto. Podemos ver no início de ambas as simulações que o estado do sistema é muito mais complexo, podendo ser uma combinação dos quatro auto-estados simultaneamente, e que mesmo após um pulso ainda é uma combinação. No entanto, assim que se repetem dois pulsos iguais pela primeira vez (em  $t = 17,7$  para o modelo 1, figura 5.5a, e em  $t = 22,0$  para o modelo 2, figura 5.5b), o comportamento volta a ser o mesmo que vimos nas demais simulações, onde o estado do sistema só pode estar em um de três regimes com número de excitações definido e conhecido: zero ( $|\psi(t)\rangle = |00\rangle$ ), uma ( $|\psi(t)\rangle = a(t)|01\rangle + b(t)|10\rangle$ ) ou duas ( $|\psi(t)\rangle = |11\rangle$ ).

Veremos na seção 5.3.1 que esse sistema não é tecnicamente renovável, visto que se renova apenas após pulsos repetidos. No entanto, contanto ocorram ao longo da evolução

dois pulos iguais em sequência (o que é praticamente garantido para simulações longas, como também veremos na seção 5.3.1), ou se começarmos em um estado projetado em um dos quatro autovetores, o comportamento desses sistemas é bastante regular. **Esse comportamento é uma consequência natural do modelo, e, como veremos, poderia ser induzido sem as simulações da figura 5.5; escolhemos mostrá-las para apresentar o leitor ao comportamento das trajetórias fora dos três regimes previamente descritos.**

Assumiremos sempre que a condição de que começamos em um estado de número de excitações bem definido é satisfeita daqui em diante.

### **Dependência nos parâmetros de acoplamento $\gamma$**

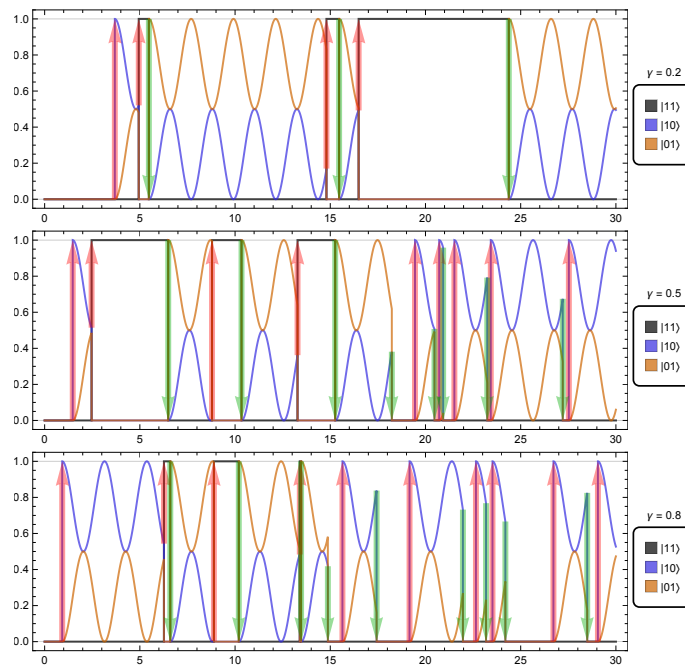
Como queremos estudar o impacto do acoplamento com os banhos na evolução do sistema, entender como os parâmetros de acoplamento  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  influenciam nas trajetórias é de suma importância. Começamos variando apenas a magnitude desses parâmetros, mas mantendo-os iguais para os dois banhos ( $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ ).

Analisemos primeiro o modelo 1 (figura 5.6a). Como esperado, a intensidade do acoplamento  $\gamma$  é correlacionada com a frequência dos pulos. Como já vimos na equação (4.20), o valor esperado de um pulo acontecer é proporcional a  $\gamma$ :

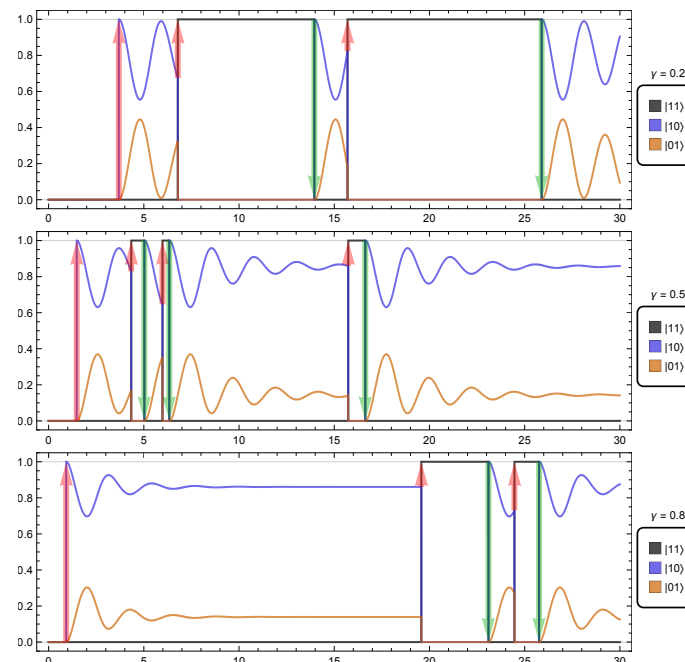
$$E[dN_1(t)] = \langle \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 \rangle(t) = \gamma_1 dt |\langle \psi(t) | 10 \rangle|^2. \quad (5.10)$$

Análogo para  $dN_2(t)$ .

Analisando as trajetórias do modelo 2 (figura 5.6b), vemos exatamente o mesmo comportamento, mas também notamos que a taxa de amortecimento das oscilações parece ser proporcional a  $\gamma$ . Mais a frente, com a matriz da hamiltoniana efetiva (5.18), ficará evidente que ele é proporcional, na realidade, a  $\gamma_1 + \gamma_2$ .



(a) Trajetórias do modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Trajetórias do modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.6: Trajetórias para diferentes parâmetros de acoplamentos  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ .

### Dependência na diferença entre parâmetros de acoplamento $\Delta\gamma$

Em seguida, é interessante analisar o comportamento das trajetórias quando os parâmetros de acoplamento são distintos. Para isolar a diferença entre ambos, fixamos  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e definimos um parâmetro  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , ou seja:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \Delta\gamma}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \Delta\gamma}{2}. \quad (5.11)$$

Vemos os resultados das simulações de trajetórias para o modelo 1 na figura 5.7 e, para o modelo 2, na figura 5.8.

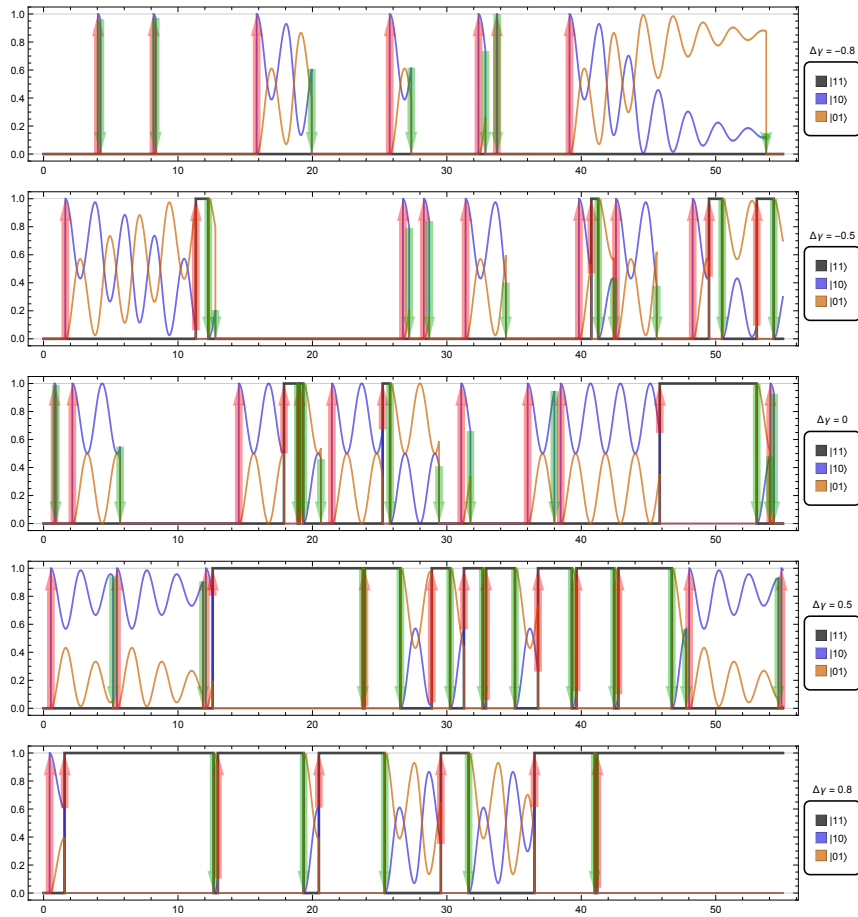


Figura 5.7: Evolução das trajetórias do modelo 1 (fig. 5.2a) para diferentes  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ .

Analisando primeiro o modelo 2 (figura 5.8), mais simples, vemos que persiste a propriedade que o estado  $|01\rangle$  em nenhum momento é mais provável do que o  $|10\rangle$ . O que observamos variando a diferença entre os acoplamentos  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , é que se a “taxa de

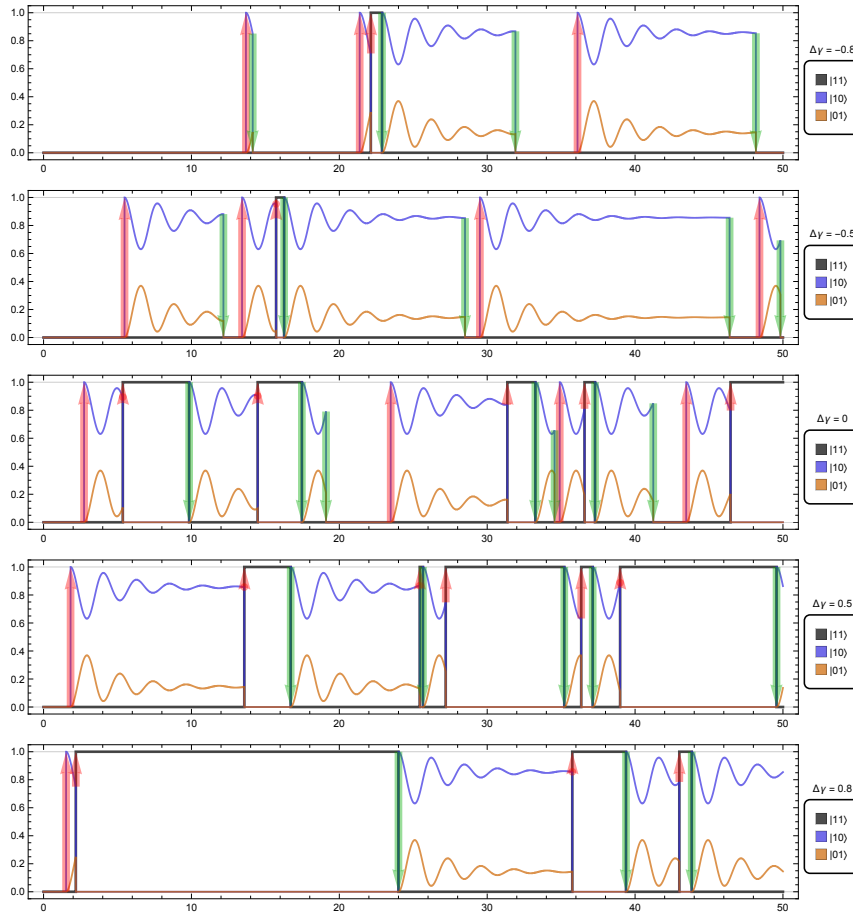


Figura 5.8: Evolução das trajetórias do modelo 2 (fig. 5.2b) para diferentes  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ .

saída” for muito mais forte do que a “taxa de entrada” ( $\Delta\gamma \gtrsim -1$ ), o estado dominante é o fundamental  $|00\rangle$ , pois toda excitação é rapidamente emitida de volta para o ambiente; se for o oposto ( $\Delta\gamma \lesssim 1$ ), as excitações se “acumulam” no sistema e  $|11\rangle$  domina; no entanto, se as duas taxas forem equiparáveis ( $\Delta\gamma \approx 0$ ), apenas  $|10\rangle$  domina, nunca  $|01\rangle$ . Ademais, agora a taxa de amortecimento da oscilação é constante.

No modelo 1 (figura 5.7), no entanto, os efeitos da variação de  $\Delta\gamma$  são mais complexos. Assim como no caso anterior, a medida que aumentamos o acoplamento relativo com o banho 1, mais o sistema tende para os estados  $|11\rangle$  ou  $|10\rangle$ , mas, se aumentamos o acoplamento relativo com o banho 2, mais ele tende para  $|00\rangle$  e para  $|01\rangle$ . Isso se dá pelo mesmo motivo que no modelo 2, mas o segundo caso ( $|01\rangle$ ) é possível porque, para o espaço reduzido do qubit 1, o qubit 2 funciona como um reservatório efetivo — não Markoviano, no entanto, posto que o estado do qubit 2 é completamente condicionado ao

**histórico de pulos do qubit 1.** O que parece menos trivial é que para  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , as oscilações de Rabi durante a evolução de resultado nulo tem decaimentos distintos para diferentes valores de  $\Delta\gamma$ , além de tender (caso não fossem interrompidas pelos pulos) a um estado estacionário dependente do sinal de  $\Delta\gamma$ , onde  $|\langle\psi|01\rangle|^2 > |\langle\psi|10\rangle|^2$  se  $\Delta\gamma$  for negativo e  $|\langle\psi|01\rangle|^2 < |\langle\psi|10\rangle|^2$  se  $\Delta\gamma$  for positivo. Vemos na figura 5.9 um gráfico da evolução de  $|\langle\psi|10\rangle|^2$  durante uma evolução sem pulo.

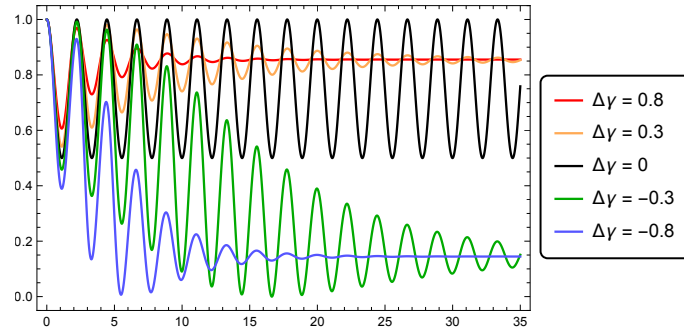


Figura 5.9: Evolução sem pulos da componente  $|01\rangle$  do estado do modelo 1 (fig. 5.2b) para diferentes  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e o estado inicial era  $|\psi(0)\rangle = |01\rangle$ . Note que para a componente  $|10\rangle$  e mesmo estado inicial, o gráfico seria o oposto a esse no eixo  $y$ .

Essa evolução é dada pela Hamiltoniana efetiva do sistema (4.40). Escrevendo-a na forma matricial na base  $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ , temos, para o modelo 1:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_e^{(1)} &= \hat{H} - \frac{i}{2} [\gamma_1 \hat{\sigma}_-^1 \hat{\sigma}_+^1 + \gamma_2 \hat{\sigma}_+^1 \hat{\sigma}_-^1] \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ou seja, analisando a mudança infinitesimal em um estado qualquer:

$$d|\psi\rangle = -i\tilde{H}_e dt |\psi\rangle \Rightarrow \begin{cases} d|11\rangle &= -\frac{1}{2}\gamma_1 dt |11\rangle \\ d|10\rangle &= -\frac{1}{2}\gamma_1 dt |10\rangle - 2i dt (h |10\rangle + \alpha |01\rangle) \\ d|01\rangle &= -\frac{1}{2}\gamma_2 dt |10\rangle + 2i dt (h |01\rangle - \alpha |10\rangle) \\ d|00\rangle &= -\frac{1}{2}\gamma_2 dt |00\rangle. \end{cases} \quad (5.13)$$

Mas devemos recordar que essa evolução não preserva norma. O estado após a evolução seria:

$$|\psi'\rangle = \frac{|\psi\rangle + d|\psi\rangle}{\sqrt{(\langle\psi| + d\langle\psi|)(|\psi\rangle + d|\psi\rangle)}} \quad (5.14)$$

Deste modo, para o primeiro e último caso, que não ganham nenhuma outra componente, a normalização do estado cancela a evolução:

$$|11'\rangle = \frac{|11\rangle - \gamma_1 dt |11\rangle}{\sqrt{(1 - \gamma_1 dt)^2}} = |11\rangle. \quad (5.15)$$

Mas, para os dois intermediários ( $|10\rangle$  e  $|01\rangle$ ), que interagem entre si, vemos que:

$$a |10\rangle + b |01\rangle \Rightarrow (a \langle 10| + b \langle 01|)(a |10\rangle + b |01\rangle) \quad (5.16)$$

$$= 1 - (a^2 \gamma_1 + b^2 \gamma_2) dt \quad (5.17)$$

E, assim, para um estado qualquer, o decaimento infinitesimal de  $|10\rangle$ , por exemplo, é proporcional a  $\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$ . Deste modo, se  $\gamma_1 > \gamma_2$  (como ambos são positivos), a contribuição de suas componentes  $|11\rangle$  e  $|10\rangle$  aumenta (pois decai mais devagar que a normalização) e a das suas componentes  $|01\rangle$  e  $|00\rangle$  diminui (pois decai mais rápido que a normalização); se  $\gamma_1 < \gamma_2$ , o contrário acontece; e, se  $\gamma_1 = \gamma_2$ , o decaimento de cada componente se cancela com o decaimento da normalização, portanto apenas a Hamiltoniana (*não* efetiva) contribui para a evolução das distribuições de probabilidade e vemos a oscilação de amplitudes constantes da figura 5.6. Analisaremos com mais calma os estados estacionários na próxima seção (sec. 5.2.2).

Retornando ao modelo 2 (figura 5.2b), podemos verificar que as conclusões que chegamos lendo os gráficos da figura 5.8 se verificam ao analisarmos a sua Hamiltoniana efetiva:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_e^{(2)} &= \hat{H} - \frac{i}{2} [\gamma_1 \hat{\sigma}_-^1 \hat{\sigma}_+^1 + \gamma_2 \hat{\sigma}_+^2 \hat{\sigma}_-^2] \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 + \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

De fato: as distribuições das componentes de  $|10\rangle$  e  $|01\rangle$  não dependem de  $\Delta\gamma$ , mas a segunda é constantemente reduzido por um fator  $(\gamma_1 + \gamma_2)/2 > 0$  — o que explica o decaimento proporcional a  $\gamma$  na figura 5.6b.

Em síntese, o comportamento das trajetórias do modelo 2 é o mais bem comportado dos dois: existe apenas três estados em que o sistema pode se encontrar, que depende exclusivamente da quantidade excitações no sistema, sendo que dois deles são constantes no tempo ( $|11\rangle$  e  $|00\rangle$ ) e o terceiro apresenta sempre o mesmo comportamento de oscilação amortecida, dependendo unicamente da Hamiltoniana (para a frequência de oscilação) e de  $\sum_i \gamma_i$  (para a taxa de amortecimento).

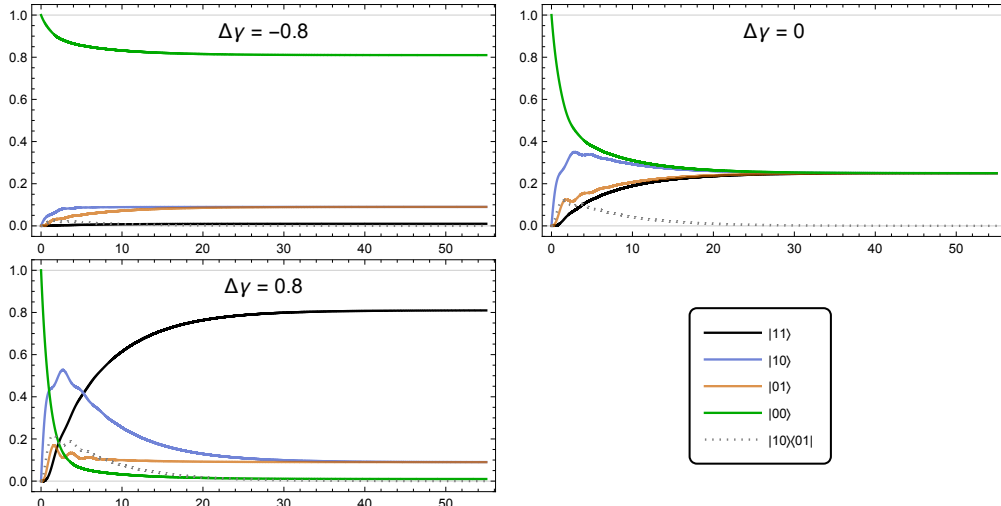
O modelo 1, em contrapartida, é degenerado no caso de uma excitação. Seus estados correspondentes parecem tender a estados estacionários (investigaremos isso a seguir) mas a taxa de amortecimento depende diretamente de ambos os parâmetros de acoplamento. Ademais, olhando para a figura 5.7, esses estados estacionários aparentemente também dependem de  $\Delta\gamma$ . Por fim, ainda existe um caso particular quando  $\gamma_1 = \gamma_2$  em que as oscilações não são amortecidas, e os dois estados degenerados são estáveis.

### **5.2.2. Evolução do estado não condicionado**

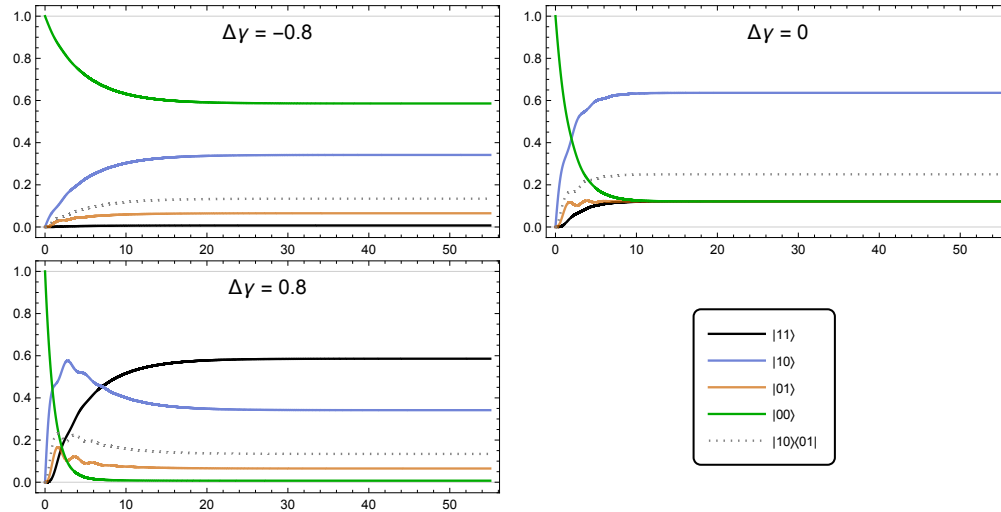
Podemos, utilizando a equação (4.45), calcular analiticamente a evolução do estado não condicionado, isto é: a evolução média de todas as trajetórias possíveis:

Nota-se na figura 5.10 que, para ambos os modelos, após algumas oscilações iniciais, o sistema tende a um estado estacionário. É possível observar, também, que esse período oscilatório se estende por mais tempo para  $\Delta\gamma$ 's maiores, o que faz sentido, visto que sempre começamos no estado fundamental, portanto o primeiro pulo possível sempre envolve a entrada de uma excitação, e, se  $\gamma_2 < \gamma_1$  demora mais tempo para que ela saia do sistema, e é sempre necessário certo tempo para que a Hamiltoniana propague parte da excitação para o qubit 2 e permita que outra possa entrar no qubit 1. Outro comportamento esperado em ambos os casos que podemos verificar nos gráficos é que, se  $\Delta\gamma < 0$ , o estado fundamental  $|00\rangle\langle 00|$  domina e, se  $\Delta\gamma > 0$ , após o tempo necessário para que duas excitações entrem no sistema, o estado mais excitado  $|11\rangle\langle 11|$  domina. Ademais, os únicos elemento fora da diagonal em nossas simulações foram  $|10\rangle\langle 01|$  e seu complexo conjugado pois assim também o era na Hamiltoniana (5.1).





(a) Modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.10: Evolução temporal das componentes do estado não condicionado do sistema para os diferentes modelos, variando a diferença entre os acoplamentos  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , iniciados no estado fundamental  $|00\rangle\langle 00|$ . Note que agora estamos tratando de um estado misto, mas mantivemos a notação de vetor para os elementos na diagonal principal por clareza. Para todos os gráficos, a evolução de  $|01\rangle\langle 10|$  é idêntica a  $|10\rangle\langle 01|$ . Todas as demais componentes não plotadas são nulas.

Analisando mais a fundo primeiro o modelo 1 (figura 5.10a), vemos que após uma diferença para tempos curtos dada pelo estado inicial, as componentes de  $|01\rangle\langle 01|$  e  $|10\rangle\langle 10|$  convergem para o mesmo valor, independente de  $\Delta\gamma$ . O motivo para a divergência inicial, com pico em  $|10\rangle\langle 10|$ , é o já mencionado fato que a excitação sempre entra pelo qubit 1 e leva certo tempo para se propagar para o qubit 2 (se começássemos o sistema no estado  $|11\rangle\langle 11|$ , o pico seria na curva de  $|01\rangle\langle 01|$ ). A convergência no estado estacionário final é mais interessante, pois indica que os dois estados possíveis para uma excitação (qubit 1 inicialmente excitado após o pulo e qubit 2 inicialmente excitado após o pulo) são igualmente prováveis para quaisquer acoplamentos com o banho. Também é interessante notar que os estados fora da diagonal principal tendem a zero para tempos longos, que se dá por conta do fluxo de energia pelo sistema passar apenas pelo qubit 1, e, portanto, tomando a média a contribuição de todas as trajetórias possíveis, as interações entre os dois qubits tendem a se cancelar. Ou seja, é como se o sistema não condicionado primeiro precisasse de um tempo para sair do estado inicial, em que excitações entram no qubit 1 e fluem para o 2, terminando em um estado misto com elementos apenas na diagonal principal, dado por três parâmetros independentes: um termo duplamente excitado  $|11\rangle\langle 11|$ , um termo fundamental  $|00\rangle\langle 00|$  e um termo em função da combinação maximamente mista dos dois estados com uma única excitação  $|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|$ .

Voltando-nos agora para o modelo 2 (figura 5.10b), a diferença que mais chama a atenção é que, pelo mesmo motivo que nas trajetórias condicionadas (figura 5.8), a componente  $|10\rangle\langle 10|$  é sempre maior que  $|01\rangle\langle 01|$ . Também é interessante que, inclusive no estado estacionário, as componentes fora da diagonal não se anulam. Em particular,  $|10\rangle\langle 01| = |01\rangle\langle 10| \neq 0 \quad \forall t$ . Isso se dá pois o subespaço de uma única excitação no sistema não é mais simétrico, como no modelo 1 (figura 5.10a), onde uma excitação tem igual probabilidade de fluir do qubit 1 para o 2 ou vice-versa e, portanto, na média (recordando que a evolução não condicionada é a média de todas as trajetórias possíveis), as correlações entre os qubits tendem a se cancelar a medida que alcançamos o estado estacionário. No modelo 2 (figura 5.10b), as interações com os banhos impõe um fluxo médio do qubit 1 para o qubit 2, e, portanto, o estado não condicionado dos dois qubits é sempre correlacionado.

Obs: enquanto  
grifava, corriji  
na versão final:  
 $\langle 01 | r_{ss} | 10 \rangle$   
 $= \langle 10 | r_{ss} | 01 \rangle$   
 $\neq 0$

(r = rho)

### Estado estacionário

Podemos olhar com mais atenção para os estados estacionários da evolução não condicionada reproduzindo o método de vetorização apresentado nas equações (4.42) e (4.43) e encontrando o autoestado  $\vec{\rho}$  de  $e^{\mathcal{L}t}$ . “Des-vetorizando-o”, obtemos a matriz densidade do estado estacionário  $\rho_{ss}$ . Apresentamos as suas componentes não nulas em função de  $\Delta\gamma$  na figura 5.11.

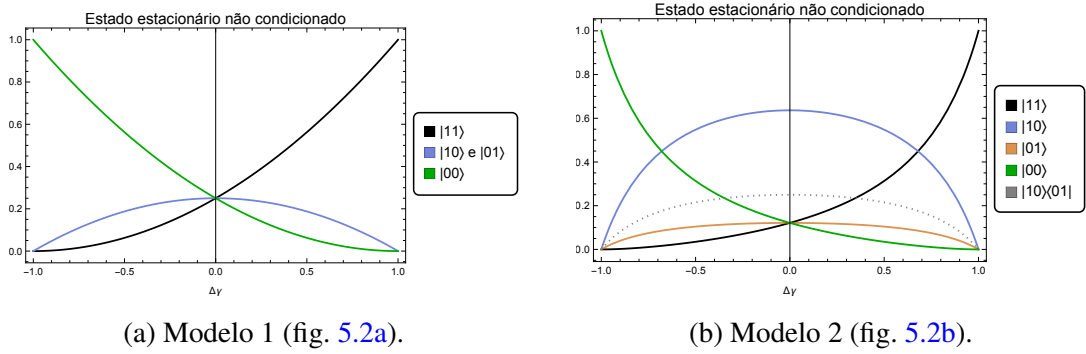


Figura 5.11: Estado estacionário do estado não condicionado do sistema em função da diferença entre os parâmetros de acoplamento com os banhos. No gráfico do modelo 2, fig. 5.11b, a componente  $|10\rangle\langle 01|$  e seu complexo conjugado coincidem. Todas as demais componentes não plotadas são nulas.

Uma fator que pode ser facilmente verificado é que o estado estacionário para ambos os modelos é independente do estado inicial (recordar da discussão sobre *processos renováveis* na seção 4.3). Para o modelo 1 (figura 5.11a), comprovamos que o estado não condicionado do sistema tende sempre para um estado com elementos apenas na diagonal principal do tipo  $a|11\rangle\langle 11| + b(|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) + c|00\rangle\langle 00|$ , onde quanto maior é a “taxa de entrada” de excitações em relação à “taxa de saída”, mais excitado ou fundamental é o estado estacionário. Quanto ao modelo 2 (figura 5.11b), podemos confirmar que para qualquer  $\Delta\gamma \in (-1,1)$  o qubit 1 se encontra mais excitado que o qubit 2, assim como a coerência entre eles (estados  $|10\rangle\langle 01|$  e c.c.) não se anulam, em acordo com o que já tínhamos podido inferir pelos gráficos da figura 5.10b.

Por fim, só ressaltamos mais uma vez que mesmo quando o estado não condicionado já se encontra praticamente em seu estado estacionário, as trajetórias individuais continuarão a oscilar estocasticamente. Se olharmos para a figura 5.10, notamos que para  $t = 50$ , o estado não condicionado do sistema, para ambos os modelos e para qualquer  $\Delta\gamma$ , já se

encontra perto do estado estacionário, mas não poderíamos saber disso olhando apenas para este mesmo instante nas trajetórias individuais das figuras 5.7 e 5.8. Recordamos que isso se dá porque as trajetórias são sempre *estocásticas*: pulos podem acontecer a cada momento e um sistema individual nunca entrará em equilíbrio. Quando falamos que a evolução não condicionada alcançou o estado estacionário, estamos falando que a distribuição *do conjunto contendo todas as trajetórias é constante*.

Explicamos isso com um exemplo: digamos, como estamos fazendo aqui, que a simulação tem duração de 55 unidades de tempo e que o incremento é  $dt = 0,001$  — ou seja, se realizam 55 mil medições ao longo de cada simulação. Cada medição pode retornar três respostas: 0 (resultado nulo), 1 (*jump-up*) ou 2 (*jump-down*), sendo o primeiro muito mais provável. Cada combinação dessa sequência de 50 mil medições é uma trajetória distinta, ou seja, temos  $3^{55\,000}$  trajetórias possíveis! No entanto, todas elas em  $t = 0$  se encontram em  $|\psi(0)\rangle = |00\rangle$ , o que certamente não é uma configuração provável dados os parâmetros. Quando o estado médio, sob a evolução não condicionada, se encontra próximo ao seu estado estacionário em um determinado instante  $t = \tau$ , o que estamos querendo dizer é que as quantidades de trajetórias no estado  $|\psi(\tau)\rangle = |11\rangle$ , no estado  $|\psi(\tau)\rangle = a(\tau)|10\rangle + b(\tau)|01\rangle$  (para todos os valores possíveis de  $a(\tau)$  e  $b(\tau)$ ) e no estado  $|\psi(\tau)\rangle = |00\rangle$  são as esperadas para a nossa escolha de parâmetros. Evidente que no instante seguinte  $t = \tau + dt$ , várias dessas trajetórias vão realizar pulos e mudar de estado, mas o número em cada uma das configurações vai permanecer praticamente o mesmo<sup>3</sup>. Dado que os nossos parâmetros ( $h, \alpha, \gamma_1, \gamma_2$ ) são fixos no tempo, é natural que essa configuração esperada seja estacionária.

<sup>3</sup>Para o conjunto total de trajetórias no estado estacionário o número total de *jump-ups* e de *jump-downs* em cada intervalo de tempo é praticamente o mesmo. Isso se dá mesmo se a probabilidade de cada pulo for diferente (*i.e.*  $\Delta\gamma \neq 0$ ) para as trajetórias individuais. *E.g.* se for mais provável um *jump-up* ( $\Delta\gamma > 0$ ), teremos dentre as  $3^{55\,000}$  trajetórias um maior número em um estado mais excitado, aumentando correspondentemente a probabilidade de um *jump-down*, ou vice-versa. Isso pode ser verificado com os gráficos dos estados estacionários das evoluções não condicionadas em função do  $\Delta\gamma$  (figura 5.11): seguindo o mesmo exemplo, se  $\Delta\gamma > 0$ , o estado estacionário é mais excitado, e, portanto, temos um maior número de trajetórias que se encontram em um estado mais excitado.

### 5.2.3. Trajetórias quânticas dos estados reduzidos dos qubits e sua entropia de von Neumann

#### Estados reduzidos

Em seguida, nos voltamos para a evolução dos estados reduzidos dos dois qubits (figuras 5.12 e 5.13). Ou seja, para o qubit 1, por exemplo,  $\rho_1 = \text{Tr}_2[|\psi\rangle\langle\psi|]$ .

Como esperado, dada a Hamiltoniana do sistema, as componentes fora da diagonal principal das matrizes densidade dos estados reduzidos de ambos os qubits permanecem nulas ao longo de todas as trajetórias. Notamos, também, que as curvas são análogas às

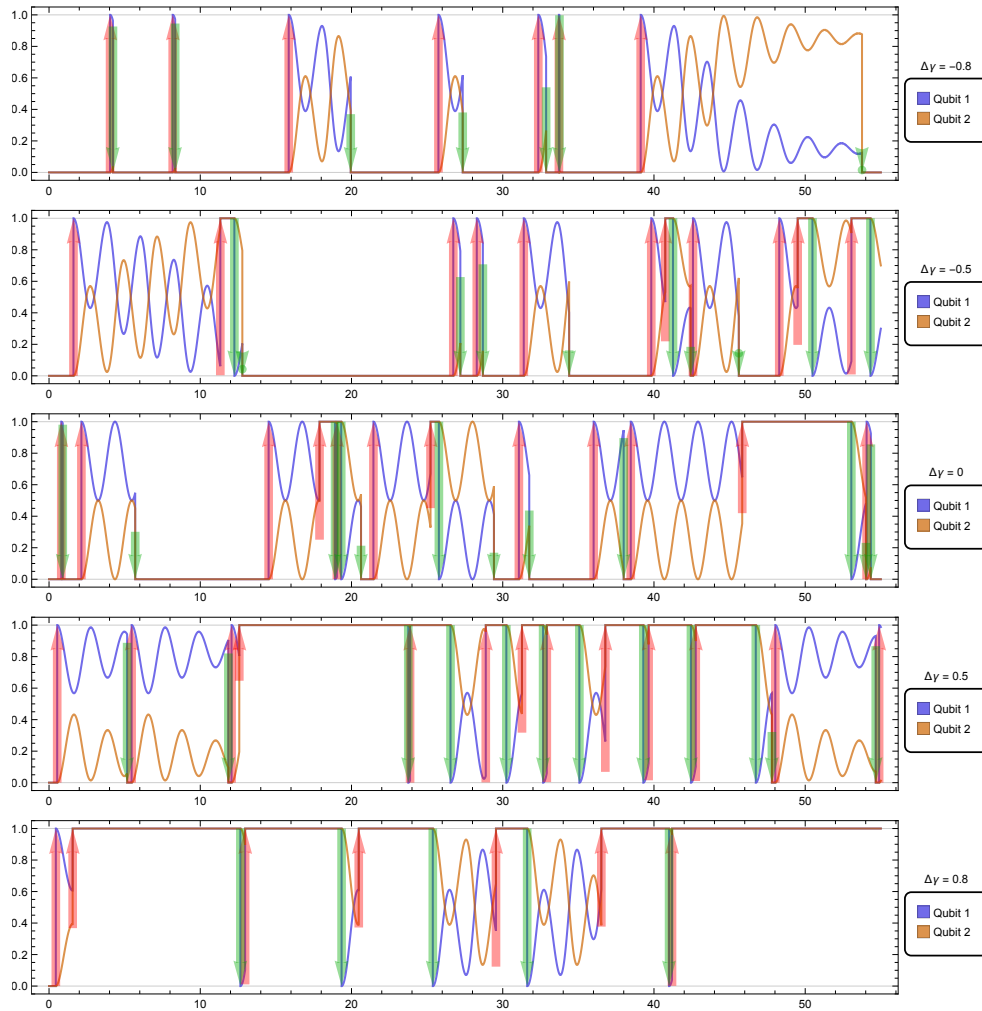


Figura 5.12: Evolução do estado excitado  $\langle 1|\rho_i|1\rangle$  dos estados reduzidos  $\rho_i$  dos qubits  $i = 1, 2$  no modelo 1 (fig. 5.2a) para diferentes  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . As curvas foram plotadas com transparência para que se possa visualizar quando se sobrepõe. As trajetórias, para cada  $\Delta\gamma$  são as mesmas das da figura 5.7

do sistema como um todo (figuras 5.7 e 5.8) se fizermos as trocas:

$$|\psi(t)\rangle = |11\rangle \longrightarrow \langle 1|\rho_1|1\rangle = \langle 1|\rho_2|1\rangle = 1, \quad (5.19)$$

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|10\rangle + b(t)|01\rangle \longrightarrow a(t)\langle 1|\rho_1|1\rangle + b(t)\langle 1|\rho_2|1\rangle \quad (5.20)$$

$$|\psi(t)\rangle = |00\rangle \longrightarrow \langle 1|\rho_1|1\rangle = \langle 1|\rho_2|1\rangle = 0 \quad (5.21)$$

o que é natural para um sistema continuamente puro.

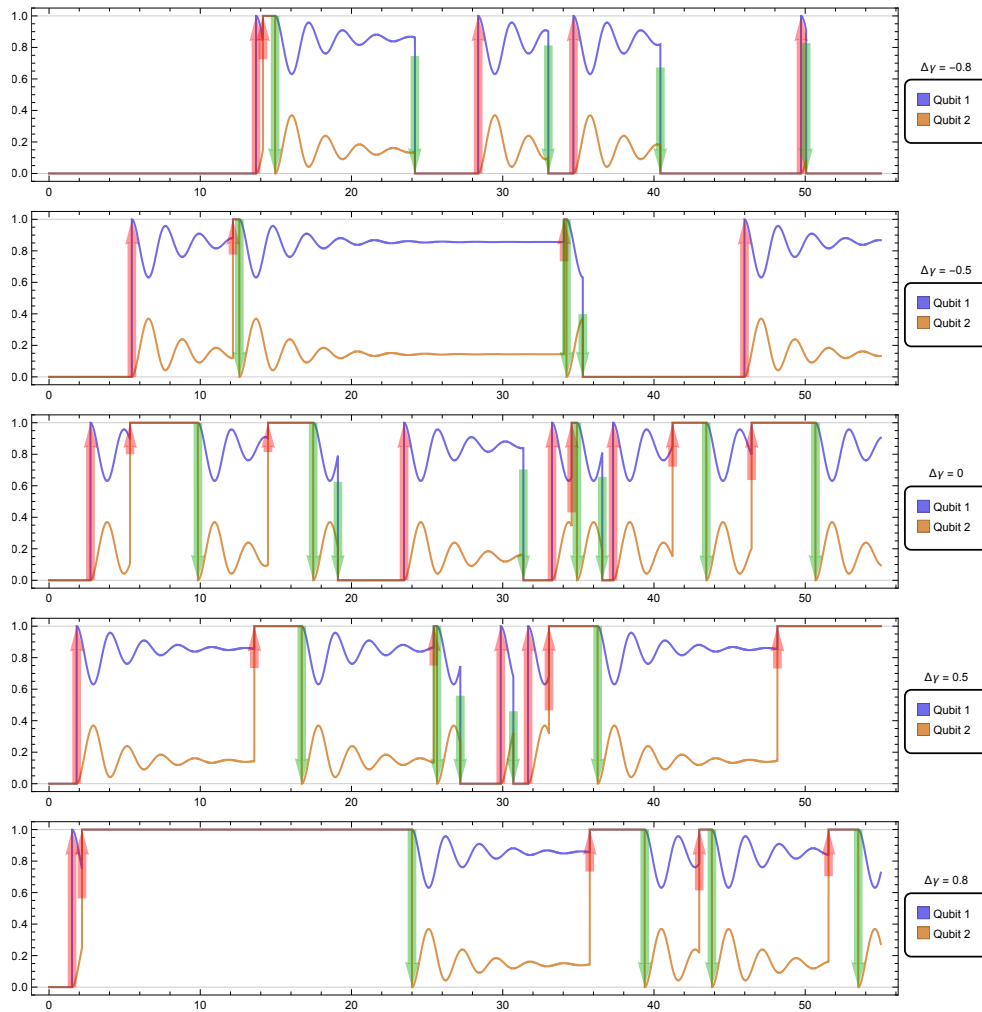


Figura 5.13: Evolução do estado excitado  $\langle 1|\rho_i|1\rangle$  dos estados reduzidos  $\rho_i$  dos qubits  $i = 1, 2$  no modelo 2 (fig. 5.2b) para diferentes  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ , onde  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . As curvas foram plotadas com transparência para que se possa visualizar quando se sobrepõe. As trajetórias, para cada  $\Delta\gamma$  são as mesmas das da figura 5.8

### Evolução da entropia de von Neumann dos estados reduzidos

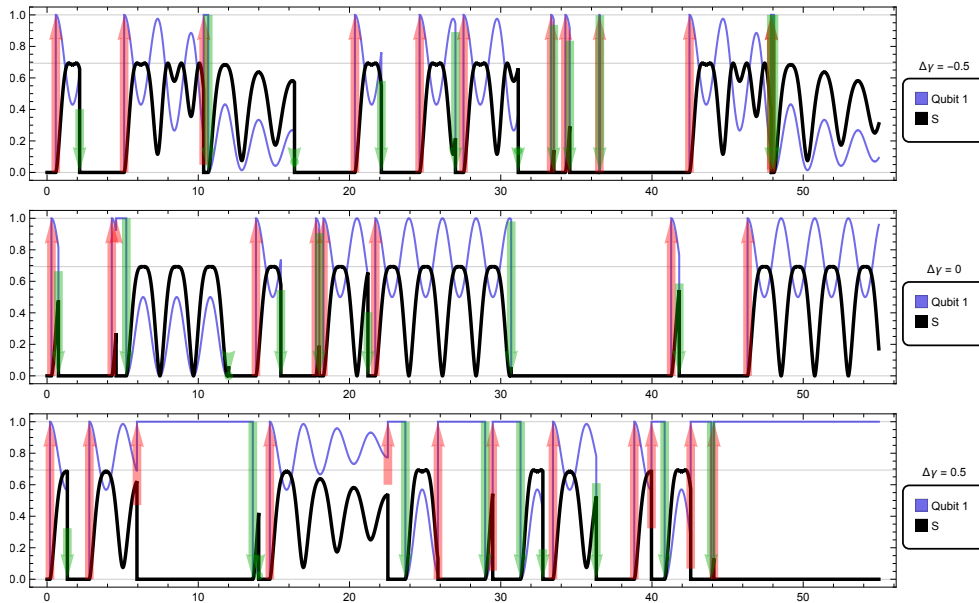
Uma das propriedades que nos interessa analisar é a evolução da entropia de von Neumann  $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \ln \rho]$  dos qubits ao longo do tempo. Conhecendo o estado reduzido dos qubits a cada intervalo de tempo, podemos calcular numericamente sua entropia correspondente. Os resultados estão apresentados na figura 5.14.

A entropia, para a teoria da informação, indica quanta informação está contida em um sistema [27], e pode funcionar na mecânica quântica como uma medida de quão misto ele é. Para um sistema de dimensão de Hilbert finita  $d$ , a sua entropia máxima será  $\log(d)$ , portanto, para um qubit, onde por definição  $d = 2$ ,  $S$  é limitada por baixo por 0 e por cima por  $\log(2) \approx 0,69$ . Como a Hamiltoniana é tal que os dois qubits apenas se **correlacionam** quando existe uma única excitação no sistema, quando ambos estão excitados ou no estado fundamental, seus estados reduzidos são puros, mas se um está excitado e o outro não, então ambos são igualmente mistos. Analisando os gráficos da figura 5.14, notamos, de fato, que a entropia vai a zero quando ambos os qubits se encontram no mesmo estado mas oscila quando há, justamente, uma única excitação oscilando entre eles.

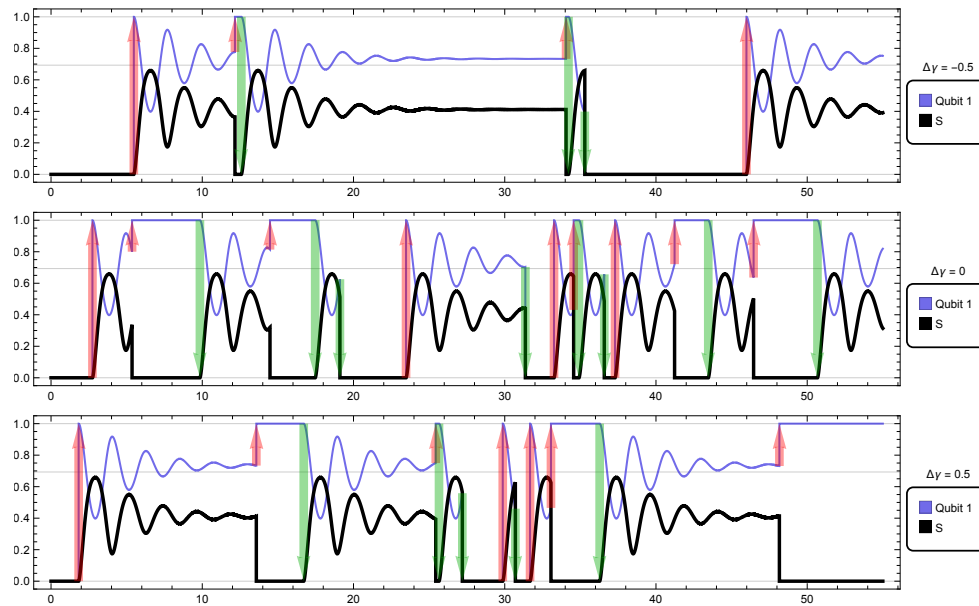
Analisando primeiro o modelo 1 (figura 5.14a), notamos que aqui, novamente, existem dois tipos distintos de oscilação. Para  $\Delta\gamma < 0$ , por exemplo, vemos que a primeira onda tem o pico “cortado” quando sucede um *jump-up* (ver fig. 5.15a), e parece mais uma oscilação amortecida simples quando sucede um *jump-down* (fig. 5.15b), invertendo o comportamento para  $\Delta\gamma > 0$ . Podemos olhar essas duas oscilações em mais detalhes na figura 5.15, onde deixamos o sistema evoluir sob a Hamiltoniana efetiva, ignorando os pulos.

Note que a curva da figura 5.15a coincide com o mesmo caso em que, nas trajetórias (figura 5.7), as curvas de  $|10\rangle$  e  $|01\rangle$  trocam de posição. Lembramos que se  $\Delta\gamma < 0$  (por exemplo), o sistema com uma única excitação tendia a um estado estacionário em que a componente de  $|10\rangle$  era menor do que  $|01\rangle$ . Mas, após um *jump-up*, o estado do sistema  $|\psi\rangle$  se encontra tal que  $|\langle\psi|10\rangle|^2 = 1 > 0 = |\langle\psi|01\rangle|^2$ , portanto além da oscilação amortecida, há a troca de posições.

Além disso, esses dois regimes claramente distintos são mais uma prova de que o sistema com uma única excitação é degenerado no modelo 1 (figura 5.2a), e em qual dos dois estados possíveis ele se encontra é condicionado pela sequência de pulos.



(a) Modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.14: Evolução da entropia de von Neumann do estado reduzido do qubit 1 para diferentes valores de  $\Delta\gamma$ . A entropia do qubit 2 é igual por simetria. Noque que ela é limitada por baixo por 0 e por cima por  $\log(2) \approx 0,69$  (indicado com uma linha horizontal). Sobreposmos o estado excitado do qubit 1 para que se possa ter noção do estado do qubit em cada instante.



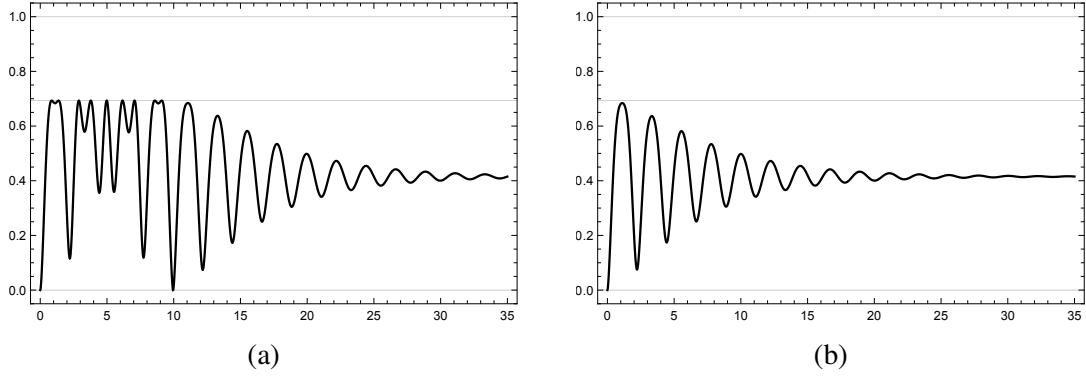


Figura 5.15: Evolução temporal sem-pulos das duas oscilações possíveis para a entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits do modelo 1 (fig. 5.2a) quando existe uma única excitação no sistema.  $\Delta\gamma = \pm 0,5$ . As curvas foram calculadas numericamente.

Em contraste, no modelo 2 (figura 5.14b), vemos apenas um único tipo de oscilação, condicionado apenas pela quantidade de excitações no sistema, e não o pulso anterior.

#### 5.2.4. Atividade dinâmica

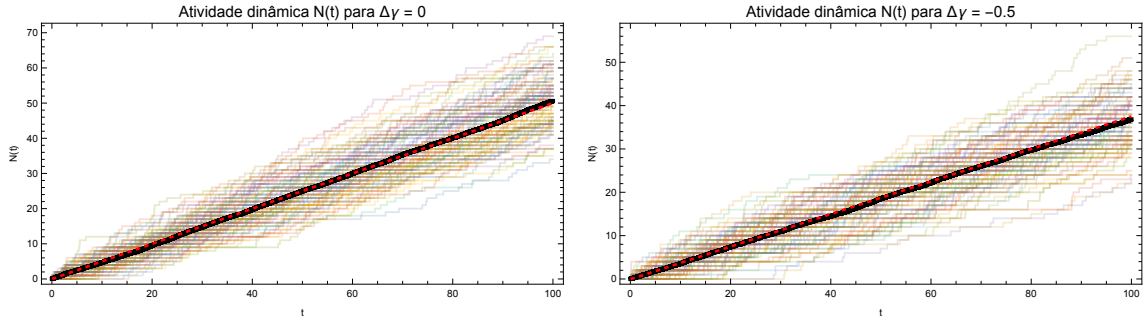
Podemos, também, olhar o número total de detecções  $N(t)$ , feito o exemplo ilustrado na figura 4.2, que chamaremos de *atividade dinâmica*. Na figura 5.16 mostramos exemplos para dois  $\Delta\gamma$ 's diferentes para cada modelo. Note que quando tiramos a atividade dinâmica média para múltiplas simulações numéricas,  $N(t)$  tende para uma reta.

Podemos calcular analiticamente o valor esperado de  $N(t)$  integrando o valor médio dos incrementos estocásticos (4.14) no tempo:

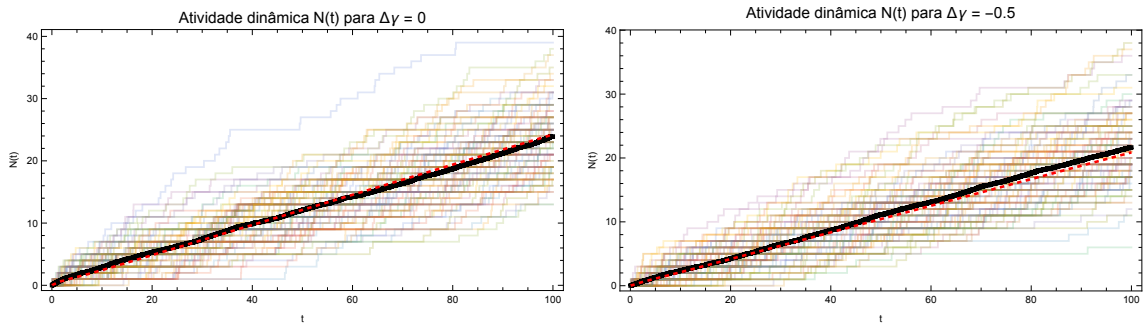
$$\begin{aligned}
 E[dN(t)] &= \int_0^t \left( E[dN_1(ds)] + E[dN_2(ds)] \right) \\
 &= \int_0^t ds \left( \langle \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 \rangle(s) + \langle \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 \rangle(s) \right) \\
 &= \int_0^t ds \left( \gamma_1 \text{Tr}[\hat{\sigma}_-^1 \hat{\sigma}_+^1 \bar{\rho}(s)] + \gamma_2 \text{Tr}[\hat{\sigma}_+^1 \hat{\sigma}_-^1 \bar{\rho}(s)] \right), \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

onde  $\bar{\rho}(t)$  é o estado não condicionado. Este resultado é a linha tracejada nos gráficos da figura 5.16.

Notamos, como esperado, que quanto mais trajetórias usarmos para calcular numericamente o valor médio da atividade dinâmica, mais próximo ele fica do resultado analítico, o que é um bom sinal, pois indica que não há erros sistemáticos em nossas simu-



(a) Modelo 1.



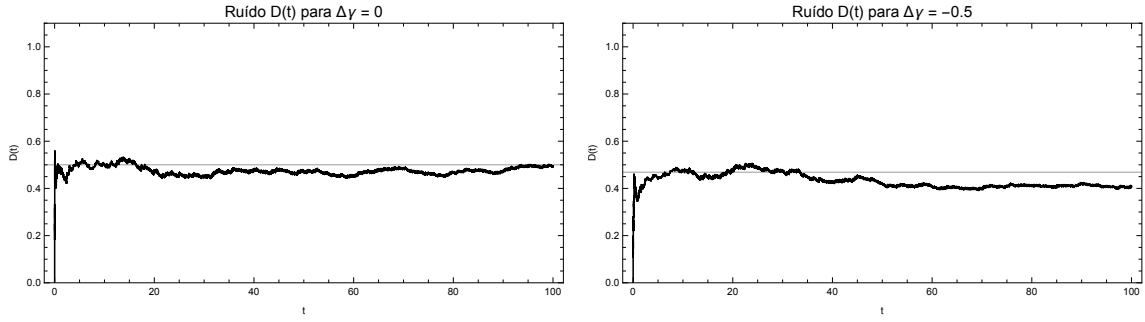
(b) Modelo 2.

Figura 5.16: As linhas coloridas são as atividades dinâmicas de 100 simulações numéricas individuais. A linha preta é a média para cada instante de tempo e a vermelha tracejada é a sua solução analítica.

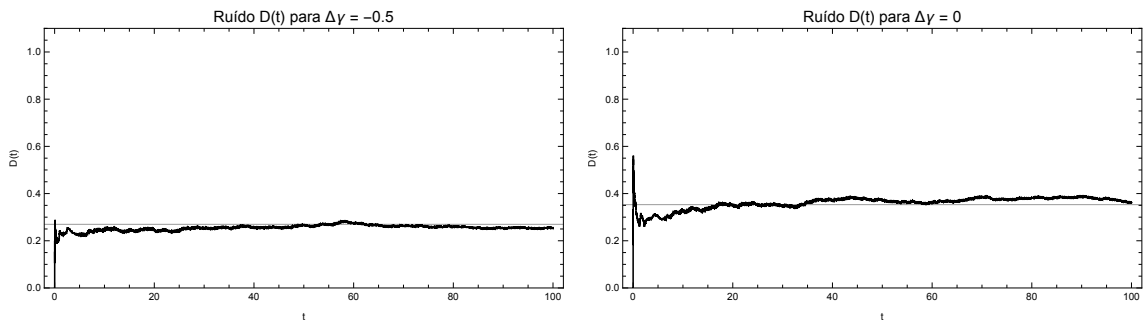
lações. Ainda assim, tendo em vista que a variância das  $N(t)$ 's das trajetórias aumenta com o tempo, quanto mais longas forem as simulações, maior é o número de trajetórias requeridas para que o a média dos  $dN(t)$ 's se aproxime de seu valor analítico.

Podemos, inclusive, estudar essa variância. Se calcularmos o **ruído** da atividade dinâmica, dado por  $D(t) = \text{Var}[N(t)]/t$ , vemos que, após certa oscilação para tempos pequenos que depende do estado inicial do sistema, ele tende a um valor constante, o ruído do estado estacionário  $\rho_{SS}$ . O valor esperado, calculado utilizando a função `FCSNoise`, da biblioteca `Melt!` do Wolfram Mathematica, é, para o modelo 1 (figura 5.2a):

$$D(\rho_{SS}) = \frac{1 - \Delta\gamma^4}{2} \quad (5.23)$$



(a) Modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.17: Ruído da atividade dinâmica calculado a partir de 500 simulações numéricas individuais. A linha horizontal indica o valor esperado do ruído médio, calculado com a função `FCSNoise`, da biblioteca *Melt!*.

e, para o modelo 2 (figura 5.2b):

$$D(\rho_{SS}) = \frac{(8\alpha)^2 \left[ \frac{1}{2}(8\alpha)^4 (\Delta\gamma^4 - 1) + \frac{1}{2}(8\alpha)^2 (\Delta\gamma^2 - 1)^3 (3(8h)^2 - 1) + (\Delta\gamma^2 - 1)^3 [(8h)^2 + 1]^2 \right]}{[(\Delta\gamma^2 - 1) [(8h)^2 + 1] - (8\alpha)^2]^3} \quad (5.24)$$

onde recordamos que  $h$  e  $\alpha$  são os parâmetros das Hamiltoniana (5.1).

### 5.3. Distribuição de tempos de espera do sistema de dois qubits

Como vimos na seção 4.3, o modelo para um sistema com 1 qubit é um processo renovável. Para dois qubits, no entanto, o comportamento passa a ser mais complexo: **no geral**, o estado reduzido do qubit interagindo localmente com o banho de fato colapsa para um

estado definido, mas o do outro qubit não. Seja um estado qualquer

$$|\psi(t)\rangle = a |00\rangle + b |01\rangle + c |10\rangle + d |11\rangle, \quad (5.25)$$

o estado após o pulo  $\hat{c}_1$  (5.3) (*jump-up*), por exemplo, será:

$$|\psi(t + dt)\rangle = \frac{\sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_+^1}{p} (a |00\rangle + b |01\rangle + c |10\rangle + d |11\rangle) \quad (5.26)$$

$$= \tilde{a} |10\rangle + \tilde{b} |11\rangle, \quad (5.27)$$

onde  $p$  é a normalização, que é absorvida pelos termos com til. Claramente esse estado ainda depende do estado inicial, no entanto, agora, se evoluir sem pulos por um intervalo de tempo  $T$ , se tornará:

$$|\psi(t + T)\rangle = \tilde{a} (\cos(\Omega T) |10\rangle + \sin(\Omega T) |01\rangle) + \tilde{b} |11\rangle, \quad (5.28)$$

onde  $\Omega = 4\sqrt{\alpha^2 + \hbar^2}$  é a frequência de Rabi da Hamiltoniana (4.40). Note que para qualquer  $t$ , se o próximo pulo também for *up*:

$$|\psi(t + T + dt)\rangle = \hat{c}_1 |\psi(t + T)\rangle = |11\rangle. \quad (5.29)$$

O mesmo ocorre para *jump-downs* repetidos (mas para estado final  $|00\rangle$ ).

Ou seja: quando temos dois pulos iguais em sequência, temos um processo renovável. Mas e quando os pulos são trocados? De fato, se começarmos com um  $|\psi\rangle$  desconhecido, não temos como saber o estado final. Aplicando um *jump-down* à equação (5.28), por exemplo:

$$|\psi(t + T + dt)\rangle = \hat{c}_2 |\psi(t + T)\rangle = \frac{\tilde{a} \cos(\Omega T)}{p'} |00\rangle + \frac{\tilde{b}}{p'} |01\rangle, \quad (5.30)$$

onde  $p'$  é a normalização. Sem saber os valores de  $a$  e  $b$  na equação (5.25) é impossível saber o valor final de cada componente de  $|\psi(t + T + dt)\rangle$ .

No entanto, se começarmos com  $|00\rangle$  ou  $|11\rangle$  (analogamente: se começarmos com um

estado qualquer e evoluirmos o sistema até dois pulos repetidos acontecerem<sup>4</sup>), o estado após o pulo pode apenas ser:

$$\hat{c}_1 |00\rangle = |10\rangle \quad (5.31)$$

$$\hat{c}_2 |11\rangle = |01\rangle \quad (5.32)$$

(vamos nos limitar modelo 1 (figura 5.2a) por ora, mas aqui para o modelo 2 (figura 5.2b), basta trocar  $|01\rangle$  por  $|10\rangle$  em (5.32)) que, se evoluir por um tempo e em seguida fizer o pulo oposto:

$$\hat{c}_2(a |10\rangle + b |01\rangle) = |11\rangle \quad (5.33)$$

$$\hat{c}_1(c |10\rangle + d |01\rangle) = |00\rangle. \quad (5.34)$$

No entanto, apesar do processo tecnicamente não ser renovável, em alguns casos conseguimos separar uma WTD de  $n$  pulos  $W(t_1, k_1, \dots, t_n, k_n | \rho_0)$ , de maneira análoga à equação (4.64):

$$W(t_1, k_1, \dots | \rho_0) = W(t_n, k_n | k_{n-1}) W(t_{n-1}, k_{n-1} | k_{n-2}) \cdots W(t_1, k_1 | \rho_0), \quad (5.35)$$

com algumas condições que ainda iremos explicitar. Em outras palavras: pode sim ser uma **cadeia de Markov**<sup>5</sup>. Mesmo assim, não podemos chamá-lo de um processo renovável porque não temos como saber qual é o estado após o pulo, tudo o que sabemos é que existem duas distribuições condicionadas unicamente pelo último pulo.

Como nestes casos existem apenas três distribuições possíveis, podemos reescrever as

<sup>4</sup>Para tempo suficientemente longo, a probabilidade de uma trajetória não ter dois pulos iguais em sequência é insignificante — e, portanto, a contribuição para as distribuições de tempo de espera dessas trajetórias também é insignificante. Como mostraremos adiante, para o caso de  $\Delta\gamma = 0$ , por exemplo, a probabilidade de pulo trocado é de 0,88, e cada simulação tem em média 498 pulos, portanto a probabilidade de uma simulação sem dois pulos iguais sucessivos é da ordem de  $10^{-28}$ .

<sup>5</sup>Aqui é bom enfatizar que a evolução em si do sistema é por construção um processo de Markov.  $|\psi(t + dt)\rangle$  depende apenas de  $|\psi(t)\rangle$  e do que aconteceu durante o intervalo  $(t, t + dt)$ . As interações entre os sistema e os banhos 1 e 2 são Markovianas e a probabilidade de um pulo depende unicamente do estado do sistema no instante imediatamente anterior. O que estamos analisando aqui é a distribuição de pulos levando apenas a sequência de pulos em consideração e desconsiderando os estados do sistema. Em resumo, o que está em discussão é se a sequência de pulos *por si só* seria um processo de Markov.

WTDs de cada intervalo como:

$$W(t, k | k, \rho_{SS}), \quad \text{para } k = \hat{c}_1, \hat{c}_2, \quad (5.36)$$

$$W(t, \hat{c}_1 | \hat{c}_2, \rho_{SS}), \quad (5.37)$$

$$W(t, \hat{c}_2 | \hat{c}_1, \rho_{SS}), \quad (5.38)$$

onde  $\rho_{SS}$  é o estado estacionário da evolução não condicionada do sistema. Provaremos no final deste capítulo que essas três distribuições são independentes dos estados e pulos anteriores.

### 5.3.1. Cálculo analítico das WTDs

Para simplificar a leitura, daqui em diante nesta seção chamaremos os três tipos de estados possíveis do sistema:

$$|\psi_2\rangle \equiv |11\rangle, \quad (5.39)$$

$$|\psi_1\rangle \equiv \text{qualquer combinação de } |01\rangle \text{ e } |10\rangle, \quad (5.40)$$

$$|\psi_0\rangle \equiv |00\rangle. \quad (5.41)$$

Também trocamos os operador de *jump-up*  $\hat{c}_1$  por  $\uparrow$  e o de *jump-down*  $\hat{c}_2$  por  $\downarrow$ .

Recorde que  $|\psi_1\rangle$  depende do tempo, enquanto  $|\psi_0\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  são constantes. O que faz desses modelos particularmente interessantes é que  $|\psi_1\rangle$ , seguido de qualquer pulo, termina em um dos estados constantes, e o único próximo pulo possível é o oposto (*i.e.* se ele fez um *jump-down* e pulou para  $|\psi_0\rangle$ , só poderá fazer um *jump-up* em seguida). Podemos calcular analiticamente sua WTD usando a equação (4.58):

$$W(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_1\rangle) = \frac{\text{Tr}[\mathcal{J}_1 e^{\mathcal{L}ot} \mathcal{J}_2 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}{\text{Tr}[\mathcal{J}_2 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]}, \quad (5.42)$$

análogo para um *jump-up* seguido de um *jump-down*. Note que por conta da normalização em  $\text{Tr}[\mathcal{J}_2 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|]$ , deixa de importar em qual dos infinitos estados possíveis de  $|\psi_1\rangle$  o sistema estava no começo. Ou seja, para ambos os modelos o tempo entre o antepenúltimo pulo e penúltimo pulo é irrelevante para a distribuição, basta saber em qual dos três tipos

Capítulo 5. Resultado das simulações de saltos quânticos para um sistema de dois qubits

de estado  $|\psi_i\rangle$ ,  $i = 0,1,2$ , o sistema está. Ademais, para o modelo 1 (figura 5.2a) em particular, a degenerescência de  $|\psi_1\rangle$ , descrita na seção 5.2.1 e exemplificada em diversos dos gráficos, não influencia em absoluto na distribuição de tempos de espera.

Voltando-nos primeiro para o modelo 1, é possível resolver a equação (5.42) com bastante facilidade, obtendo-se:

$$W_1(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_1\rangle) = \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad W_1(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_1\rangle) = \gamma_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (5.43)$$

O índice  $_1$  indica que se trata de uma WTD do modelo 1.

No entanto, se começarmos com os outros dois estados, existem, para cada, duas distribuições possíveis: começando no estado  $|\psi_0\rangle$  e tendo um *jump-up* seguido de um *jump-down*, terminando de volta em  $|\psi_0\rangle$ , ou temos dois *jump-ups*, terminando em  $|\psi_2\rangle$ , respectivamente:

$$W_1(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_0\rangle), \quad \text{e} \quad W_1(t, \uparrow | \uparrow, |\psi_0\rangle). \quad (5.44)$$

Análogo para evoluções começadas com  $|\psi_2\rangle$ , temos dois casos possíveis:

$$W_1(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_2\rangle), \quad \text{e} \quad W_1(t, \downarrow | \downarrow, |\psi_2\rangle). \quad (5.45)$$

Suas equações ficam:

$$W_1(t, \uparrow | \uparrow, |\psi_0\rangle) = \gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t} \alpha^2 \left( \frac{\cosh(C_+ t) - \cosh(C_- t)}{A} \right), \quad (5.46)$$

$$W_1(t, \downarrow | \downarrow, |\psi_2\rangle) = \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t} \alpha^2 \left( \frac{\cosh(C_+ t) - \cosh(C_- t)}{A} \right), \quad (5.47)$$

onde definimos

$$C_{\pm} \equiv \sqrt{2[\pm A - (\Omega + \Gamma_-)]}, \quad A \equiv \sqrt{(\Omega + \Gamma_-)^2 - \alpha^2 \Gamma_-},$$

$$\Gamma_- \equiv \left( \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{4} \right)^2$$

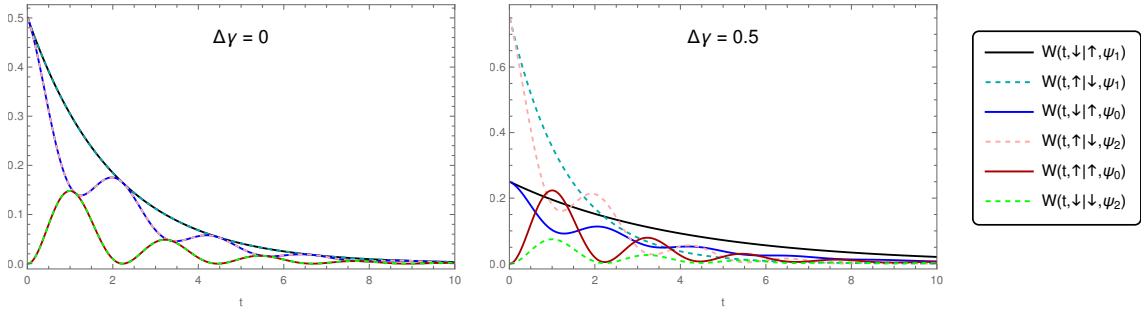
recordando que  $h$  e  $\alpha$  vêm da Hamiltoniana (5.1) e que  $\Omega = 4\sqrt{h^2 + \alpha^2}$  é a frequência de Rabi. Ou seja: a única diferença entre as duas distribuições é a amplitude proporcional ao  $\gamma_i$  correspondente.

As outras duas distribuições têm, no geral, equações muito mais complexas, não valendo a pena serem escritas aqui (ver a figura 5.18 para dois exemplos de seu comportamento). No entanto, se fixarmos  $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ , podemos simplificar enormemente essas quatro distribuições:

$$W_1(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_0\rangle) = W_1(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_2\rangle) = \gamma e^{-\gamma t} \left( 1 - \frac{\alpha^2 \sin^2(\Omega t/2)}{\Omega/2} \right), \quad (5.48)$$

$$W_1(t, \uparrow | \uparrow, |\psi_0\rangle) = W_1(t, \downarrow | \downarrow, |\psi_2\rangle) = \gamma e^{-\gamma t} \frac{\alpha^2 \sin^2(\Omega t/2)}{\Omega/2}. \quad (5.49)$$

Plotando em um gráfico essas seis distribuições, obtemos a figura 5.18.



(a) WTDs do modelo 1 para  $\Delta\gamma = 0$       (b) WTDs do modelo 1 para  $\Delta\gamma = 0,5$

Figura 5.18: As seis distribuições de tempo de espera do modelo 1 (fig. 5.2a) calculadas analiticamente para  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e diferentes valores de  $\Delta\gamma$ . Para  $\Delta\gamma = 0$ , assim como indicado nas equações (5.48) e (5.49), as curvas se sobrepõem. Para  $\Delta\gamma = -0,5$ , as curvas tracejadas e as contínuas do gráfico da figura 5.18b trocariam de posição.

Comparando a figura 5.18a com a 5.18b, notamos que, assim como esperado, se  $\gamma_1 > \gamma_2$ , distribuições em função de *jump-ups* se tornam mais prováveis do que as em função de *jump-downs*.

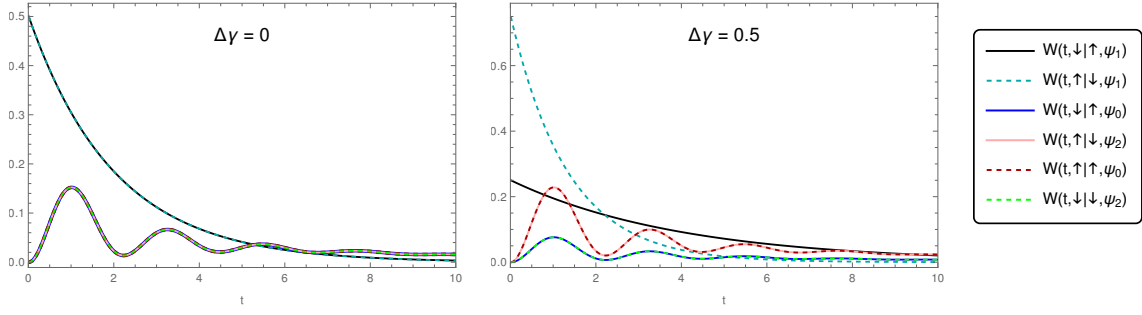
Analogamente, para o modelo 2 (figura 5.2b), obtemos a figura 5.19.

Igual ao modelo 1, nas equações (5.43), o comportamento partindo de um estado intermediário  $|\psi_1\rangle$  e pulando para um dos estado constantes é um decaimento exponencial:

$$W_2(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_1\rangle) = \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad W_2(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_1\rangle) = \gamma_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (5.50)$$

Não deve surpreender que essas distribuições sejam idênticas às do modelo 1 (5.43): em ambos os casos teremos operadores locais atuando em um sistema no estado  $|00\rangle\langle 00|$  ou





(a) WTDs do modelo 2 para  $\Delta\gamma = 0$     (b) WTDs do modelo 2 para  $\Delta\gamma = 0,5$

Figura 5.19: As seis distribuições de tempo de espera do modelo 2 (fig. 5.2b) calculadas analiticamente para  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e diferentes valores de  $\Delta\gamma$ . Note que para  $\Delta\gamma = 0$ , as quatro últimas distribuições, começadas em  $|\psi_0\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ , estão se sobrepondo. Atente, também, que apesar das cores terem sido mantidas as mesmas da figura 5.18, trocamos nas curvas rosa e vermelha o tracejado pela linha contínua, para facilitar a leitura nas curvas que se sobrepõe.

$|11\rangle|11\rangle$ . Por simetria, é indiferente para a distribuição de probabilidades se o *jump-down* age no qubit 1 (modelo 1) ou no qubit 2 (modelo 2).

Suas equações em função do tempo ficam:

$$\begin{aligned} W_2(t, \uparrow|\downarrow, |\psi_2\rangle) &= W_2(t, \uparrow|\uparrow, |\psi_0\rangle) \\ &= \gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}t} \alpha^2 \left( \frac{\cosh(D-t) - \cos(D+t)}{B} \right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} W_2(t, \downarrow|\uparrow, |\psi_0\rangle) &= W_2(t, \downarrow|\downarrow, |\psi_2\rangle) \\ &= \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}t} \alpha^2 \left( \frac{\cosh(D-t) - \cos(D+t)}{B} \right), \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} D_{\pm} &\equiv \sqrt{2(B \pm (\Omega + \Gamma_+))}, & B &\equiv \sqrt{(\Omega + \Gamma_+)^2 - \alpha^2 \Gamma_+}, \\ \Gamma_+ &\equiv \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

Ou seja, a única diferença entre estas distribuições e (5.46) e (5.47) é que  $B$  depende da soma de  $\gamma_1$  com  $\gamma_2$ , enquanto que  $A$  depende da diferença. Mas essa distinção já é suficiente para que possamos separar a dinâmica entre uma componente hiperbólica e uma senoidal, visto que necessariamente  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ , mas  $\Delta\gamma$  pode mudar de sinal.

A característica que mais chama atenção nas WTDs do modelo 2 (fig. 5.2b) em relação

às do modelo 1 (fig. 5.2a) é que temos apenas quatro curvas distintas. Analisando-as, notamos que, ao contrário do modelo 1, não estão condicionadas ao estado anterior ao pulo  $e$  ao primeiro pulo, mas apenas ao estado após o primeiro pulo:

$$W_2(t, \uparrow | |\psi_0\rangle) \equiv W_2(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_1\rangle), \quad (5.53)$$

$$W_2(t, \downarrow | |\psi_2\rangle) \equiv W_2(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_1\rangle), \quad (5.54)$$

$$W_2(t, \downarrow | |\psi_1\rangle) \equiv W_2(t, \downarrow | \uparrow, |\psi_0\rangle) = W_2(t, \downarrow | \downarrow, |\psi_2\rangle), \quad (5.55)$$

$$W_2(t, \uparrow | |\psi_1\rangle) \equiv W_2(t, \uparrow | \downarrow, |\psi_2\rangle) = W_2(t, \uparrow | \uparrow, |\psi_0\rangle). \quad (5.56)$$

Esta é uma consequência direta do set-up. Se recordarmos a discussão na seção 5.2.1, no modelo 2, ao contrário do modelo 1, o estado intermediário  $|\psi_1\rangle$  não é degenerado, portanto não faria sentido haver seis distribuições distintas. Ademais, como no estado intermediário uma excitação no qubit 1 deve “fluir” por meio da Hamiltoniana até o qubit 2, tanto para que possa sair do sistema (*jump-down*) quanto para que outra excitação possa entrar (*jump-up*), esperamos, de fato, que suas distribuições comecem em zero.

### 5.3.2. Cálculo numérico das WTDs utilizando as simulações

O método que foi empregado para plotar a WTD foi rodar mil simulações para cada caso, cada uma com duração de mil unidades de tempo, extrair a sequência de pulos, com o instante em que cada pulo aconteceu, e plotar o histograma dos intervalos.

Contudo, agora não mais temos acesso ao estado do sistema (como seria em um experimento real, aliás). Evidente que podemos inferir esse estado com base nos pulos anteriores, encontrando a última vez que dois se repetiram e, a partir disso, inferir todos os estados posteriores. No entanto, a distribuição decorrente inviavelmente vai estar condicionada por uma lista arbitrariamente longa de pulos:

$$W(t, k_{i+1} | k_i, \dots, k_{i-n+1}, k_{i-n}) \begin{cases} \text{para} & k_{i-n+1} = k_{i-n} \\ \text{e} & k_{j+1} \neq k_j, \quad \forall j \in (i, i-n+1) \end{cases} \quad (5.57)$$

sendo que esse  $n$  é desconhecido.

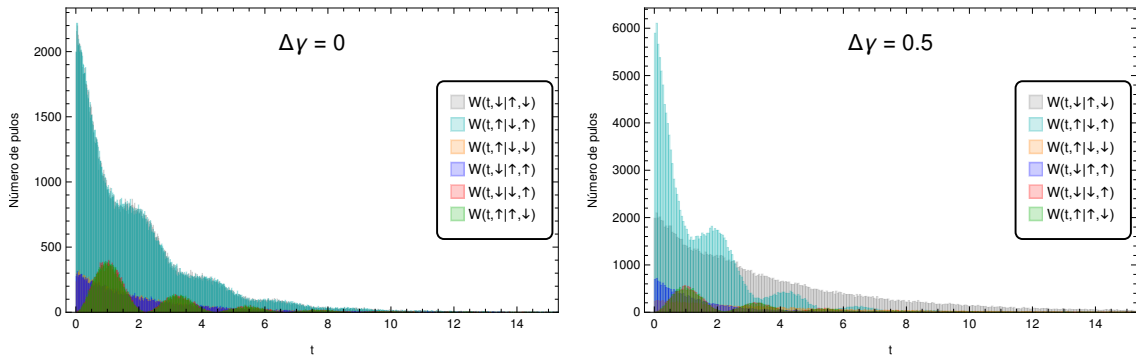
A primeira conclusão é que apenas simulações numéricas longas o suficiente pode-

rão nos levar a resultados que se aproximam do valor analítico esperado. Isso pois, se forem curtas demais, a probabilidade de dois pulos não se repetirem é não nula e toda a trajetória se mantém condicionada ao estado inicial (para os parâmetros utilizados, essa probabilidade é praticamente zero, como mencionado na nota de rodapé 4).

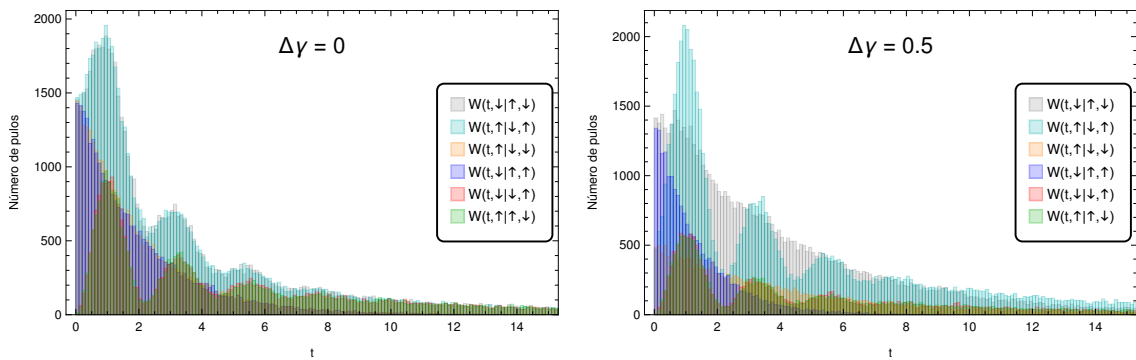
Poderíamos, então, pegar as listas de pulos, identificar pulos repetidos e, a partir deles inferir o estado do sistema para cada instante, mas esse método parece muito artificial. Em vez disso, foi decidido plotar distribuições totalmente distintas das das figuras 5.18 e 5.19, com condicionadas apenas à sequência de pulos:

$$W(t, k_{i+1} | k_i, |\psi\rangle) \longrightarrow W(t, k_{i+1} | k_i, k_{i-1}) \quad (5.58)$$

(nos limitaremos a dois pulos).



(a) Histogramas do intervalo entre pulos do modelo 1 (fig. 5.2a).



(b) Histogramas do intervalo entre pulos do modelo 2 (fig. 5.2b).

Figura 5.20: Histograma do intervalo de tempo entre pulos para 1000 simulações de duração de 1000 unidades de tempo. Notamos que assim como para a solução analítica, para  $\Delta\gamma = 0$  existe uma simetria à troca de pulos ( $W(t, \uparrow | \uparrow, \downarrow) = W(t, \downarrow | \downarrow, \uparrow)$ , etc.).

Observando os gráficos da figura 5.20, notamos rapidamente que os histogramas não correspondem às distribuições previstas. Isso se dá por dois fatores: Primeiro, a ambiguidade do estado inicial previamente discutida:  $W(t, \downarrow | \uparrow, \downarrow)$ , por exemplo, pode ter começado em  $|\psi_2\rangle$  ou  $|\psi_1\rangle$  (terminando, respectivamente, em  $|\psi_1\rangle$  ou  $|\psi_0\rangle$ ), e não temos acesso direto a essa informação por meio das simulações. Em segundo lugar, para  $\Delta\gamma \neq 0$ , uma distribuição de pulos repetidos é limitada pela outra. Se  $\Delta\gamma < 0$ , por exemplo, a probabilidade de o sistema dar dois *jump-downs* é maior do que a de dar dois *jump-ups*, mas para essa sequência ser possível, ele tem que começar no estado  $|\psi_2\rangle$ , que para esse  $\Delta\gamma$  é menos provável que o estado  $|\psi_0\rangle$ . Isso pois o estado  $|\psi_2\rangle$ , seguindo ainda o mesmo exemplo, necessariamente só é alcançado após dois *jump-ups* se partirmos do estado inicial  $|\psi_0\rangle$ . Ou seja: no final o número total de pares em sequência de *jump-ups* tem que ser igual ao de *jump-downs*.

Portanto, não podemos simplesmente utilizar as soluções analíticas apresentadas nas figuras 5.18 e 5.19 e esperar que elas coincidam com as simulações. Para resolver o primeiro problema, marginalizamos as distribuições pelo seu primeiro pulo:

$$W(t, k_{i+1} | k_i) = \sum_{k_{i-1} \in \{\uparrow, \downarrow\}} W(t, k_{i+1} | k_i, k_{i-1}), \quad (5.59)$$

levando em consideração os estados permitidos.

Em seguida, para resolver o segundo problema, mudamos os estados anteriores ao primeiro pulo para o estado estacionário da evolução não condicionada  $\rho_{SS}$  (figura 5.11) [41]. Isso pois, visto que as simulações são longas em comparação com os intervalos entre pulos, esse é o estado médio do sistema durante praticamente toda a duração da simulação. Deste modo, as distribuições de tempo de espera são normalizadas corretamente. Assim:

$$W_N(t, k_{i+1} | k_i) = W_A(t, k_{i+1} | k_i, \rho_{SS}), \quad (5.60)$$

onde  $W_N$  corresponde à distribuição numérica extraída das simulações e  $W_A$  à distribuição esperada calculada analiticamente usando a equação (4.58). Vemos o resultado das comparações nas figuras 5.21 e 5.22.

O que podemos concluir é que mesmo a evolução do sistema não sendo um processo

Capítulo 5. Resultado das simulações de saltos quânticos para um sistema de dois qubits

renovável, é possível tanto calcular analiticamente as suas distribuições de tempos de espera condicionadas apenas pelo último pulso quanto extrair essas distribuições das simulações numéricas das trajetórias. A evolução completa, após múltiplos pulsos e intervalos de evolução sem detecção, pode assim ser caracterizada como uma cadeia Markoviana.

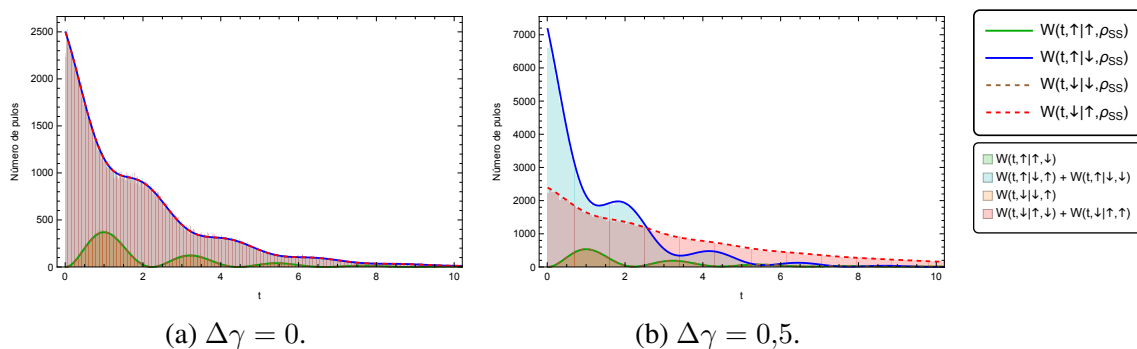


Figura 5.21: Comparação das WTDs para o modelo 1 (fig. 5.2a).

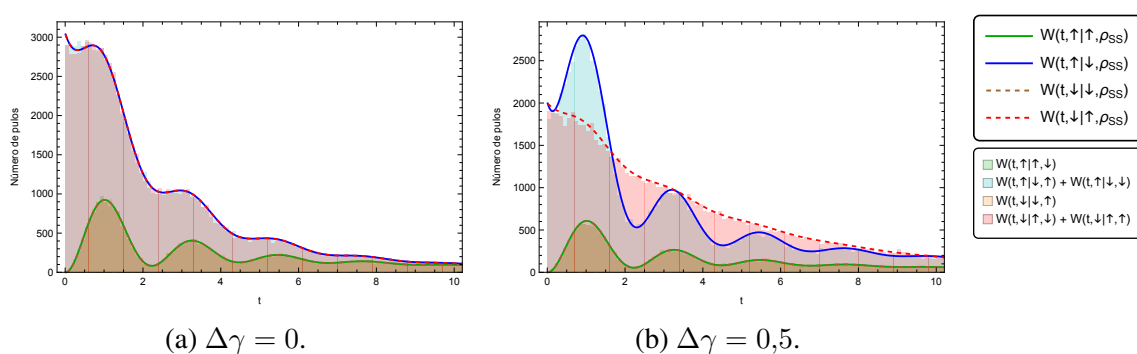


Figura 5.22: Comparação das WTDs para o modelo 2 (fig. 5.2b).

# 6

## Difusão quântica

Apresentamos, no começo do capítulo 4, a definição de *trajetória quântica*: são as realizações condicionadas pelo resultado do monitoramento de um sistema dado que sua evolução média, *não* condicionada, tende a ser contínua quando o intervalo entre medições  $dt \rightarrow 0$ , e como nos permite definir as *medidas contínuas quânticas*. No modelo então apresentado, o de saltos quânticos, a *back-action* das medições provocava uma grande descontinuidade nas trajetórias. A continuidade na evolução média, assim, era atingida apenas porque os pulos ocorriam com probabilidade proporcional a  $dt$ .

No presente capítulo, apresentaremos outra maneira de realizar medições contínuas, desta vez por meio de **medidas Gaussianas fracas** (que chamaremos as vezes apenas de *medidas Gaussianas* ou *medidas fracas*). Neste protocolo, em vez de termos longos períodos de evolução sem detecção seguidos de colapsos bruscos quando um clique acontece, teremos a todo instante o operador de medição provocando pequenos desvios no estado do sistema — desvios estes cuja variância é proporcional a  $dt$ . Por fim, focaremos em particular no método conhecido como **ponto de contato quântico (QPC)**, na sigla em inglês).

As referências principais para este capítulo foram, para as seções de cálculo estocástico os livros “*Stochastic Processes for Physicists*” [28] e “*Quantum Measurement Theory and its Applications*” [18], de Kurt Jacobs; para as seções sobre medida fraca quântica e QPC, o tutorial “*Current fluctuations in open quantum systems: Bridging the gap between quantum continuous measurements and full counting statistics*” [20], de Gabriel T. Landi, Michael J. Kewming, Mark T. Mitchison e Patrick P. Potts e o já ampla-

mente citado *Quantum Measurement and Control* [17], de Howard M. Wiseman e Gerard J. Milburn.

## 6.1. Equações diferenciais estocásticas e ruído Gaussiano

Na seção 4.1.1 foi apresentada a ideia de que o incremento de uma equação diferencial pode depender de variáveis aleatórias. Reproduzindo a equação (4.12):

$$dx = f(x,t) dt + g(x,t) d\xi(t), \quad (6.1)$$

onde  $d\xi(t)$  é uma variável aleatória que pode assumir um valor qualquer em cada incremento.

Para intervalos de tempo  $dt$  finitos, definindo  $t_n = n dt$ , para  $n = 1, \dots, \infty$ , a consequência mais significativa desse fato é que cada *realização* da variável em  $x(t_n)$  é condicionado a todos os valores  $d\xi_0, \dots, d\xi_n$ , que a variável assumiu até o momento.

No capítulo 4, estudamos o caso em que essa variável aleatória caracterizava um *processo pontual*, podendo valer 0 ou 1 e cuja média era proporcional ao intervalo de tempo  $dt$ :  $E[d\xi(t)] = \lambda(x) dt$ , onde  $\lambda(x)$  é uma função positiva. Essa variável aleatória, chamada de incremento  $dN(t)$ , modela um sistema físico na medida que  $dN(t) = 1$  corresponde a uma detecção registrada durante o intervalo  $(t, t + dt)$ , e  $dN(t) = 0$  a nenhuma durante o mesmo intervalo. Ou seja, isso só é satisfeito quando o intervalo é extremamente curto, de modo que a probabilidade de duas detecções ocorrerem durante ele é desprezível. Neste caso, a função  $\lambda(x)$  apenas corresponde à probabilidade de detecção naquele instante, e, como esse valor é finito, a condição para que o modelo descreva uma trajetória quântica

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E[d\rho(t)] = 0 \quad \implies \quad \lim_{dt \rightarrow 0} E[dN(t)] = 0 \quad (6.2)$$

é satisfeita. Ou seja, aquele modelo de fato pode descrever um processo físico.

Uma característica bastante particular de processos pontuais é que não importando quão curto  $dt$  seja, conquanto seja *finito*, todo pulo ( $dN = 1$ ) provocará uma quebra de continuidade na trajetória. Por mais que a evolução média (não condicionada) seja



contínua, as trajetórias não o são. No entanto, como já foi sugerido naquela seção, esse não é o único modelo relevante para descrever trajetórias quânticas.

Digamos que queremos medir uma variável cujo valor real  $x(t)$  é medido continuamente. O resultado dessa medição pode ser escrito como:

$$r(t) = x(t) + \xi(t), \quad (6.3)$$

onde  $\xi(t)$  é o erro de medição. Esse erro pode advir de diversas fontes possíveis. Supondo que não seja sistemático,  $d\xi(t)$ , o erro para cada medição de duração  $dt$ , será consequência de diversas flutuações microscópicas do sistema, completamente independentes entre si e cujos tempos característicos podemos supor serem muito mais curtos do que  $dt$  [28]. Ou seja, cada  $d\xi(t)$  é a soma da contribuição de uma infinidade de variáveis aleatórias independentes, cujas distribuições desconhecemos totalmente. O **teorema do limite central** afirma que a densidade de probabilidade da soma de diversas variáveis aleatórias tende a ser uma distribuição Gaussiana a medida que o número de variáveis vai a infinito [28]. Ou seja, cada  $d\xi$  é independente e possui uma densidade de probabilidade idêntica, razoavelmente aproximada por uma Gaussiana:

$$\wp(d\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{d\xi^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.4)$$

onde  $\sigma$  é desvio padrão de  $d\xi$ . Omitiremos daqui em diante a dependência de  $d\xi$  no tempo, mas mantenha em mente que para cada intervalo de tempo ele tem um valor diferente.

Como os sistemas físicos que nos interessa estudar são *trajetórias quânticas*, queremos que o valor esperado da evolução de  $r(t)$  seja contínuo quando o incremento  $dt$  tende a zero. Uma maneira de termos isso é se a variância do erro for uma função de  $dt$ , que tende a zero a com ele:

$$\text{Var}[d\xi] = f(dt) \quad \text{tal que} \quad \lim_{dt \rightarrow 0} f(dt) = 0. \quad (6.5)$$

Seja, sem perda de generalidade,  $x(t) = 0$  para todo  $t$ , podemos definir uma variável medida:

$$\Xi(T) = \int_0^T d\xi. \quad (6.6)$$

Para  $dt = \Delta t$  finito,  $T = N\Delta t$  e  $d\xi(n\Delta t) \equiv \Delta\xi_n$ , para  $n, N \in \mathbb{N}$ , a variância de  $r(T)$  será dada pela soma das  $N$  variâncias de  $\Delta\xi$ :

$$\text{Var}[\Xi(T)] = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Var}[\Delta\xi_n] = Nf(\Delta t) = f(T), \quad (6.7)$$

pois  $\Xi$  é igual a  $\Delta\xi$  exceto pela duração do intervalo de tempo, e a sua distribuição deve ser independente de em quantas partes decidimos dividir  $T$ .

Seja  $f$  é uma função polinomial,  $f(t) = \beta t^\alpha$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  constantes. Assim,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \text{Var}[\Delta\xi_n] = N(\beta\Delta t^\alpha) = \beta N \left(\frac{T}{N}\right)^\alpha = \beta N^{(1-\alpha)}T^\alpha. \quad (6.8)$$

Tiramos agora o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , ou, equivalentemente,  $N \rightarrow \infty$ :

$$\text{Var}[\Xi(T)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta N^{(1-\alpha)}T^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ T & \text{se } \alpha = 1 \\ \infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$= f(T) = \beta T^\alpha. \quad (6.10)$$

Portanto  $\alpha = 1$  e a variância do ruído é proporcional a  $dt$ .

Removendo a constante  $\beta$  para fora da distribuição, podemos enfim definir o incremento estocástico que será empregado em todo este capítulo e no seguinte, o **incremento de Wiener**  $dW$ , cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$\wp(dW) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} e^{-\frac{dW^2}{2dt}}, \quad (6.11)$$

ou seja:

$$\text{E}[dW] = 0, \quad \text{Var}[dW] = dt. \quad (6.12)$$

Assim como nos processos pontuais, não podemos ignorar as contribuições de segunda ordem de  $dW$  às equações diferenciais estocásticas. Seu valor esperado é:

$$dt = \text{Var}[dW] = \text{E}[(dW)^2] - (\text{E}[dW])^2 = \text{E}[(dW)^2]. \quad (6.13)$$

Já a sua variância pode ser calculada a partir de (6.11), obtendo-se  $\text{Var}[(dW)^2] = 2 dt^2$ . Usando esse resultado, podemos calcular a variância de  $\int_0^T (dW)^2$ :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \int_0^T (dW)^2 \right] &= \text{Var} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta W)^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \text{Var} [(\Delta W)^2] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (2\Delta t^2) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} N \Delta t^2 = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T^2}{N} = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ou seja:  $\int_0^T (dW)^2$  é determinístico. Isso é suficiente para provar que não apenas seu valor esperado, mas, para qualquer equação diferencial estocástica:

$$\boxed{\int (dW)^2 = \int dt.} \quad (6.15)$$

Podemos, por fim, reescrevendo (6.12), resumirmos as propriedades do ruído de Wiener às **regras de Itô** [28]:

$$E[dW] = 0 \quad (6.16)$$

$$E[(dW)^2] = dt \quad (6.17)$$

## 6.2. Processos difusivos e medida Gaussiana fraca

### 6.2.1. Processos difusivos e corrente

Como mencionado na seção 3.5, a decomposição do Liouvilliano  $\mathcal{L}$  entre uma parte dissipativa  $\mathcal{D}[\hat{c}_k]$  e uma Hermitiana  $\hat{H}$  não é única. Em particular, qualquer equação mestra estocástica

$$d\rho = -i dt[\hat{H}, \rho] + dt \sum_k \mathcal{D}[\hat{c}_k] \rho \quad (6.18)$$

é invariante sob a transformação

$$\hat{c}_k \longrightarrow \hat{c}_k + \alpha_k, \quad \hat{H} \longrightarrow \hat{H} - \frac{i}{2} \sum_k \left( \alpha_k^* \hat{c}_k - \alpha_k \hat{c}_k^\dagger \right), \quad (6.19)$$

onde  $\alpha$  é um número complexo arbitrário. Com esses novos operadores de pulso, podemos definir novos operadores de medição:

$$\hat{M}_k = \sqrt{dt}(\hat{c}_k + \alpha), \quad \hat{M}_0 = \hat{1} - dt \left( i\hat{H} + \frac{1}{2} \sum_k (\hat{c}_k^\dagger + \alpha_k^*)(\hat{c}_k + \alpha_k) \right). \quad (6.20)$$

Como discutido na seção 3.1, isso corresponde a uma mudança de base no conjunto dos operadores de medição, que desemaranham (“*unravell*”) as evoluções condicionadas do sistema em um conjunto de trajetórias distinto.

As constantes  $\alpha_k$ , chamadas de *correntes de referência*, são, como mencionado, arbitrariamente grandes. Se forem muito pequenas, é fácil de perceber que se recupera a dinâmica dos processos pontuais — mas o que nos interessa é o caso oposto: quando os  $\alpha_k$ s são muito grandes. Fisicamente, isso corresponde a passar um fluxo de partículas muito forte pelo detector, mas onde apenas algumas interagem com o sistema sendo medido. Como não temos como saber quais interagiram e quais não, temos que supor que cada partícula tem uma probabilidade pequena de carregar consigo informação sobre o sistema. No limite onde  $|\alpha_k| \rightarrow \infty$ , essa probabilidade cai a zero, a *back-action* no sistema se torna infinitesimal, e, portanto, a sua evolução *condicionada* se torna contínua. Estes são conhecidos como **processos difusivos**.

Falamos de *corrente* porque o fluxo de partículas sendo detectadas (fótons ou elétrons) é tão alto que não mais faz sentido falar de “intervalos em que uma detecção acontece”, mas sim da “quantidade de detecções por intervalo de tempo”. Definimos, respectivamente, a *corrente de detecções estocástica* e a *corrente de detecções média* como:

$$I(t) = \sum_k \nu_k \frac{dN_k(t)}{dt}, \quad J(t) \equiv \mathbb{E}[I(t)] = \sum_k \nu_k \mathbb{E} \left[ \frac{dN_k(t)}{dt} \right], \quad (6.21)$$

onde  $N(t)$  é a atividade dinâmica (ver seç. 5.2.4) e  $\nu_k$  são parâmetros relativos a qual corrente estamos interessados em medir (nos gráficos da seção 5.2.4, por exemplo,  $\nu_\uparrow = \nu_\downarrow = 1$ , pois queremos saber o número total de pulsos; se o nosso foco fosse a excitação do sistema pelo tempo, poderíamos definir  $\nu_\uparrow = 1 = -\nu_\downarrow$ , etc.).  $dN_k$  pode ser tratado como o incremento estocástico de um processo pontual, portanto substituímos o seu valor

esperado em  $J(t)$  por (4.20), e, reescrevendo  $\alpha_k = |\alpha_k|e^{i\phi_k}$ , temos:

$$\begin{aligned}
 J(t) &= \sum_k \nu_k \text{Tr}[(c_k + \alpha_k)^\dagger (c_k + \alpha_k) \rho(t)] \\
 &= \sum_k \nu_k \left( \text{Tr}[\alpha_k^* \alpha_k \rho(t)] + \text{Tr}[(\alpha_k^* \hat{c} + \alpha_k \hat{c}^\dagger) \rho(t)] + \text{Tr}[\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rho(t)] \right) \\
 &= \sum_k \nu_k \left( |\alpha_k|^2 + |\alpha_k| \langle \hat{x}_k \rangle(t) + \langle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rangle(t) \right)
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde  $\hat{x}_k$  é a quadratura do sistema:

$$\hat{x}_k = \hat{c}_k e^{-i\phi_k} + \hat{c}_k^\dagger e^{i\phi_k}. \tag{6.23}$$

Se a corrente de referência for suficientemente forte,  $|\alpha_k|^2 \gg |\alpha_k| \langle \hat{x}_k \rangle(t) \gg \langle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rangle(t)$ . Desprezando, assim, a terceira componente de (6.22), e como  $|\alpha_k|$  é uma constante, podemos medir apenas a quadratura por meio da corrente estocástica *difusiva*:

$$I_{\text{dif}}(t) = \sum_k \frac{\nu_k}{|\alpha_k|} \left( \frac{dN_k(t)}{dt} - |\alpha_k|^2 \right), \tag{6.24}$$

a corrente difusiva média passa a ser:

$$J_{\text{dif}}(t) \equiv \text{E}[I_{\text{dif}}(t)] = \sum_k \nu_k \langle \hat{x}_k \rangle(t) \tag{6.25}$$

Esse formalismo é comumente utilizado na ótica quântica, para modelar as medidas *homodina* e *heterodina*. Na primeira,  $\hat{M} = (\hat{c} + \alpha)$  corresponde a uma medida de foto-detecção, onde  $\hat{c}$  são os fótons emitidos pelo sistema e a corrente de referência  $\alpha$  vem de um oscilador coerente local de intensidade muito superior, que são combinados por meio de um divisor de raios. Assim, quando uma fóton é detectado, ele quase que exclusivamente vem da corrente de referência, mas, em um referencial girante com a frequência do oscilador local, ainda podemos isolar a equação mestra do sistema. A medida heterodina é semelhante, mas a luz emitida pelo sistema é antes dividida por um divisor de raios, e então cada feixe é medido homodinamente.

Uma apresentação mais completa desses dois métodos pode ser encontrada na seção II.D.1 da ref. [20], nas seções 4.4 e 4.5 da ref. [17] ou na seção 3.4 da ref. [18]. Neste tra-

balho focaremos no caso em que a corrente é de elétrons, mas isso será melhor explicado na seção 6.3.

### 6.2.2. Equação mestra estocástica para processos difusivos

Recordamos a equação mestra estocástica para processos pontuais (eq. (4.29)):

$$d\rho(t) = -i dt[\hat{H}, \rho(t)] + \sum_k \left[ dt \left( -\frac{1}{2} \{ \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k, \rho(t) \} + \langle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rangle(t) \rho(t) \right) + dN_k \left( \frac{\hat{c}_k^\dagger \rho(t) \hat{c}_k}{\langle \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \rangle(t)} - \rho(t) \right) \right]. \quad (6.26)$$

onde  $dN_k = 0,1 \forall k$ , ou seja: há no máximo um único pulso por intervalo de tempo  $dt$ . Por simplicidade, trataremos a seguir apenas do caso com um único canal quântico, a generalização para múltiplos  $ks$  é trivial. Essa equação pode ser simplificada para:

$$d\rho = dt \mathcal{L} \rho + \left( \frac{dN}{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle} - dt \right) (\hat{c}^\dagger \rho \hat{c} - \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \rho) \quad (6.27)$$

onde ignoramos as dependências em  $t$  para facilitar a leitura. Para fazer a transformação (6.19), usamos que o Liouvilliano é invariante e a equação (6.27) passa a ser:

$$d\rho = dt \mathcal{L} \rho + \left[ \frac{dN}{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle + |\alpha| \langle \hat{x} \rangle + |\alpha|^2} - dt \right] \times \left[ \hat{c}^\dagger \rho \hat{c} + |\alpha| (\hat{c}^\dagger e^{i\phi} \rho + \rho \hat{c} e^{-i\phi}) - \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \rho - |\alpha| \langle \hat{x} \rangle \rho \right]. \quad (6.28)$$

Para  $|\alpha|^2$  muito grande, podemos usar a aproximação:

$$\frac{1}{|\alpha_k|^2 + |\alpha| \langle \hat{x} \rangle + \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle} \approx \frac{1}{|\alpha|^2} - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|^3} - \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle}{|\alpha|^4}. \quad (6.29)$$

Assim, com um pouco de manipulação, a equação (6.28) vira:

$$d\rho = dt \mathcal{L} \rho + \left[ \frac{dN}{|\alpha|^2} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} - \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle}{|\alpha|^2} \right) - dt \right] \times \left[ \hat{c}^\dagger \rho \hat{c} - \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \rho + |\alpha| (\hat{c}^\dagger e^{i\phi} \rho + \rho \hat{c} e^{-i\phi} - \langle \hat{x} \rangle \rho) \right]. \quad (6.30)$$

Removendo todos os termos de ordem inferior a  $\mathcal{O}(|\alpha|^{-2})$  e reordenando os demais, resta:

$$\begin{aligned} d\rho = dt\mathcal{L}\rho + \left(\frac{dN}{|\alpha|^2} - dt\right) (\hat{c}^\dagger\rho\hat{c} - \langle\hat{c}^\dagger\hat{c}\rangle\rho) \\ + \left[\frac{dN}{|\alpha|} \left(1 - \frac{\langle\hat{x}\rangle}{|\alpha|}\right) - |\alpha| dt\right] (\mathcal{H}\rho - \langle\hat{x}\rangle\rho), \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde utilizamos o superoperador

$$\mathcal{H}_k\rho = \hat{c}^\dagger e^{i\phi}\rho + \rho\hat{c}e^{-i\phi}. \quad (6.32)$$

para um único canal.

Reiteramos, no entanto, que a equação assume que  $dt$  é tão curto que apenas um pulso acontece. Se tomarmos o limite difusivo  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , aumentando enormemente a corrente de partículas,  $dt$  teria que diminuir proporcionalmente. Isso pois a transformação (6.19) também altera a probabilidade de detectar um pulso durante o intervalo:

$$\Pr(dN = 1) = \mathbb{E}[dN] = \langle\hat{M}^\dagger\hat{M}\rangle = dt(\langle\hat{c}^\dagger\hat{c}\rangle + |\alpha|\langle\hat{x}\rangle + |\alpha|^2), \quad (6.33)$$

onde usamos (4.14). Temos, deste modo, que definir um novo intervalo de tempo  $d\tau$ , que seja longo o suficiente para que o número de detecções ao longo dele seja muito grande (no limite,  $(|\alpha|d\tau) \rightarrow \infty$ ), mas curto o suficiente para que a variação de  $\rho$  seja irrelevante (*i.e.*  $d\rho(d\tau) \rightarrow 0$ ) [20]. Assim, a distribuição de detecções ao longo do novo intervalo passa a ser:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{d\tau} dN\right) = \mathbf{B}\left[\frac{d\tau}{dt}, \Pr(dN = 1)\right] \quad (6.34)$$

onde  $\mathbf{B}[n,p]$  é a distribuição binomial para  $n$  tentativas com probabilidade  $p$ . Para  $dt \rightarrow 0$ , o número de tentativas vai a infinito e a distribuição binomial tende para uma distribuição Gaussiana com média  $np$  e variância  $np(1-p)$ .

Podemos usar isso para definir a primeira parte do terceiro termo da equação (6.31) como um *incremento de Wiener*:

$$dW = \int_0^{d\tau} \left[\frac{dN}{|\alpha|} \left(1 - \frac{\langle\hat{x}\rangle}{|\alpha|}\right) - |\alpha| dt\right]. \quad (6.35)$$

pois (6.35) satisfaz a primeira regra de Itô (6.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[dW] &= \int_0^{d\tau} \left[ \frac{\langle \hat{M}^\dagger \hat{M} \rangle}{|\alpha|} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} \right) - |\alpha| dt \right] \\ &= \frac{d\tau}{|\alpha|} \left[ \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} \right) - \langle \hat{x} \rangle^2 \right] \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

pela nossa escolha de  $d\tau$ .

Também satisfaz a segunda regra de Itô (6.17), pois

$$\begin{aligned} (dW)^2 &= \int_0^{d\tau} \int_0^{d\tau} \left[ \frac{dN(t)}{|\alpha|} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle(t)}{|\alpha|} \right) - |\alpha| dt \right] \left[ \frac{dN(s)}{|\alpha|} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle(s)}{|\alpha|} \right) - |\alpha| ds \right] \\ &= \int_0^{d\tau} \left[ \int_0^{d\tau} \frac{dN(t) \delta(t-s)}{|\alpha|^2} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle(t)}{|\alpha|} \right) \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle(s)}{|\alpha|} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 d\tau dN(t) \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle(t)}{|\alpha|} \right) + \mathcal{O}(d\tau^2) \right], \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde usamos (4.13) e a simetria das variáveis de integração. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(dW)^2] &= \int_0^{d\tau} dt \langle \hat{M}^\dagger \hat{M} \rangle \left( \frac{1}{|\alpha|^2} - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|^3} - 2 dt d\tau \langle \hat{M}^\dagger \hat{M} \rangle \right) \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} \right) \\ &= d\tau \left( \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle}{|\alpha|^2} + \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} + 1 \right) \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} \right)^2 + \mathcal{O}(d\tau^2) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} d\tau. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Ou seja, a equação (6.35) de fato satisfaz as condições para ser um incremento de Wiener.

Deste modo, podemos retornar à equação mestra (6.31) e integrá-la para o novo intervalo de tempo  $d\tau$ . Recordando que  $d\tau$  é curto o bastante para a matriz densidade não mudar:

$$d\rho \approx \int_0^{d\tau} d\rho(dt) = d\tau \mathcal{L}\rho + \int_0^{d\tau} \left( \frac{dN}{|\alpha|^2} - dt \right) (\hat{c}^\dagger \rho \hat{c} - \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \rho) + dW (\mathcal{H}\rho - \langle \hat{x} \rangle \rho), \quad (6.39)$$

Note, no entanto, que o segundo termo da equação (6.39) se cancela no limite contí-



nuo, pois:

$$\begin{aligned} \int_0^{d\tau} \left( \frac{dN}{|\alpha|^2} - dt \right) &= \frac{1}{|\alpha| - \langle \hat{x} \rangle} \int_0^{d\tau} \left[ \frac{dN}{|\alpha|} \left( 1 - \frac{\langle \hat{x} \rangle}{|\alpha|} \right) - |\alpha| dt + \langle \hat{x} \rangle dt \right] \\ &= \frac{dW + \langle \hat{x} \rangle d\tau}{|\alpha| - \langle \hat{x} \rangle} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Assim, recuperando os múltiplos canais  $k$  e voltando a chamar o intervalo de tempo de  $dt$ , a equação mestra de um processo difusivo fica:

$$d\rho = dt \mathcal{L}\rho + \sum_k dW_k (\mathcal{H}_k \rho - \langle \hat{x}_k \rangle \rho). \quad (6.41)$$

Esta é a equação que será empregada para a simulação das trajetórias no capítulo 7.

### 6.2.3. Medida Gaussiana fraca

Nesse novo paradigma de processos difusivos deixa de ser útil a antiga definição do operador de medição como um contador de partículas. Como já mencionado, frequentemente temos acesso apenas à corrente. Podemos reescrever a corrente difusiva (eq. (6.24)) em termos do incremento de Wiener, por meio de uma mudança a partir da escolha de  $dW$  (eq. (6.35)):

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{1}{|\alpha_k|^2} \left[ \frac{dN_k}{dt} (|\alpha_k| - \langle \hat{x}_k \rangle) - |\alpha_k|^2 \right] \quad (6.42)$$

$$\Rightarrow I_{\text{dif}}(t) = \sum_k \nu_k \left( \langle \hat{x}_k \rangle + \frac{dW_k}{dt} \right). \quad (6.43)$$

Definiremos agora novos operadores de medição mais adequados. Seja  $\hat{X}$  um observável Hermitiano e o operador de medição

$$\hat{M}_z = \left( \frac{2\lambda dt}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda dt(z - \hat{X})^2} \quad (6.44)$$

onde  $z \in \mathbf{R}$  são os possíveis resultados da medição e  $\lambda > 0$  a sua força. Note que se medirmos um estado qualquer  $\rho$  na base dos autovetores de  $\hat{X} = \sum_x x |x\rangle\langle x|$ , temos uma

distribuição Gaussiana de  $z$ , com média em  $\langle \hat{X} \rangle$  e variância  $(4\lambda dt)^{-1} + \text{Var}[\hat{X}]$ :

$$\text{Tr} \left[ \hat{M}_z \rho \hat{M}_z^\dagger \right] = \left( \frac{2\lambda dt}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_x e^{-2\lambda dt(z-x)^2} \langle x | \rho | x \rangle. \quad (6.45)$$

Deste modo, parece razoável tentar reescrever essa função em termos do incremento de Wiener, e, de fato, podemos facilmente verificar que

$$dW = 2\sqrt{\lambda} dt(z - \langle \hat{X} \rangle) \quad (6.46)$$

satisfaz as regras de Itô (basta usar a média e variância de  $z$ ). Ademais, substituindo esse  $dW$  na equação (6.45), recuperamos a distribuição do incremento de Wiener (6.11).

Redefinimos também os operadores de pulo

$$\hat{c}_z = \sqrt{\lambda} \hat{X}. \quad (6.47)$$

Deste modo, isolando  $z$  na equação (6.46) e substituindo-o no operador de medição (6.44), podemos expandi-lo na série de Taylor:

$$\begin{aligned} \hat{M}_z &= \left( \frac{2\lambda dt}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\lambda dt \left( \frac{dW}{2\sqrt{\lambda} dt} + \langle \hat{X} \rangle - \hat{X} \right)^2 \right\} \\ &= \left( \frac{2\lambda dt}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -dt \left( \frac{dt}{4 dt^2} - dW dt \delta \hat{c}_z + \delta \hat{c}_z^2 \right) \right\} \\ &= \left( \frac{2\lambda dt}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} + dW \delta \hat{c}_z - dt \delta \hat{c}_z^2 \right\} \\ &= \left( \frac{2\lambda dt}{\pi e} \right)^{\frac{1}{4}} \left( 1 + dW \delta \hat{c}_z - \frac{1}{2} dt \delta \hat{c}_z^2 + \mathcal{O}(dt^2) \right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

onde  $\delta \hat{c}_z = \hat{c}_z - \langle \hat{c}_z \rangle$  e usamos que  $dW^2 = dt$ .

Assim, usando que  $\hat{c}^\dagger = \hat{c}$ , o sistema condicionado após uma medição evolui como:

$$\begin{aligned}
 \rho'_z &= \frac{\hat{M}_z \rho \hat{M}_z^\dagger}{\text{Tr}[\hat{M}_z \rho \hat{M}_z^\dagger]} \\
 &= \left(1 + dW \delta \hat{c}_z + \frac{3}{2} dt \delta \hat{c}_z^2\right) \rho \left(1 + dW \delta \hat{c}_z + \frac{3}{2} dt \delta \hat{c}_z^2\right) \\
 &= \rho + dt \left( \delta \hat{c}_z \rho \delta \hat{c}_z - \frac{1}{2} \{ \delta \hat{c}_z^2, \rho \} \right) + dW \{ \delta \hat{c}_z, \rho \} \\
 &= \rho + dt \left( \hat{c}_z \rho \hat{c}_z - \frac{1}{2} \{ \hat{c}_z^2, \rho \} \right) + dW \left( \{ \hat{c}_z, \rho \} - 2 \langle \hat{c}_z \rangle \rho \right) \\
 &= \rho + dt \mathcal{D}_z \rho + dW \left( \mathcal{H}[\hat{c}_z] \rho - \langle \hat{x}_z \rangle \rho \right) \tag{6.49}
 \end{aligned}$$

onde a normalização é  $\langle \delta \hat{c}_z \rangle = \langle \delta \hat{c}_z^2 \rangle = 0$  e, na última linha,  $\mathcal{D}[\hat{c}_z]$  é o dissipador e substituímos os termos pela quadratura e o superoperador (6.32):

$$\hat{x}_z = \hat{c}_z + \hat{c}_z^\dagger = 2\hat{c}_z, \quad \mathcal{H}_z \rho = \rho \hat{c}_z + \hat{c}_z^\dagger \rho = \{ \hat{c}_z, \rho \} \tag{6.50}$$

Ou seja: para  $d\rho = \rho'_z - \rho$ , a evolução no sistema provocada por medida fraca contínua é descrita pela equação mestra de processos difusivos.

### Detecção de carga

Note que se escolhermos o parâmetro  $\nu = (2\sqrt{\lambda})^{-1}$ , a corrente difusiva (6.43) vira:

$$I_{\text{dif}}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( 2\langle \hat{c}_z \rangle + \frac{2\sqrt{\lambda} dt \left( z - \frac{\langle \hat{c}_z \rangle}{\sqrt{\lambda}} \right)}{dt} \right) = z \tag{6.51}$$

Assim, se escolhermos o sistema como um qubit e  $\hat{X} = \hat{n}$  (o operador de número), a corrente difusiva será o fluxo dos resultados da medição contínua da sua ocupação (*i.e.*, para um qubit, a probabilidade dele se encontrar no estado excitado), ou, em outras palavras, a sua *carga*.

A seguir, estudaremos um exemplo real de tal procedimento.

### 6.3. Ponto de contato quântico (QPC)

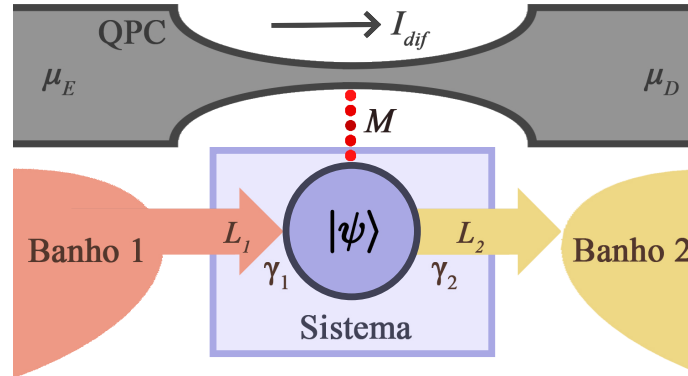


Figura 6.1: Esquema da medição contínua de um qubit em contato com dois banhos por meio da corrente passando por um ponto de contato quântico (QPC). Excitações entram no sistema vindas do banho 1, agindo localmente como o operador de pulso  $\hat{L}_1 = \gamma_1 \hat{\sigma}_+$ , e saem para o banho dois, agindo como o operador de pulso  $\hat{L}_2 = \gamma_2 \hat{\sigma}_-$ . O operador de medição, dado pela interação entre o sistema e o QPC, é  $\hat{M} = \lambda \hat{\sigma}_z$ .  $\gamma_{1,2}$  e  $\xi$  são constantes positivas, e  $\mu_E > \mu_D$  são os potenciais químicos dos contatos do QPC.

Seguiremos nessa seção o formalismo de Wiseman e Milburn na seção 4.9.1 da referência [17]. Na figura 6.1 há uma ilustração esquemática de como funciona uma medição contínua por ponto de contato quântico. Neste capítulo trabalharemos com um sistema composto por apenas um qubit (em azul), que interage com dois banhos térmicos (em amarelo e vermelho), trocando excitações com ele. Essas trocas agem no sistema como operadores de pulso, cuja distribuição é dada por um processo pontual idêntico ao descrito no capítulo 4. A diferença fundamental é que agora esse canal não é mais monitorado diretamente, e podemos apenas inferir quando o pulso acontece pela mudança que ele provoca no sistema, que, por sua vez, está interagindo com o instrumento de medição, um ponto de contato quântico (mais conhecido pelo acrônimo em inglês **QPC**; em cinza, na figura): dois reservatórios de férmions com potenciais químicos  $\mu$  distintos, tal que elétrons tunelam do reservatório da esquerda para o da direita, produzindo uma corrente  $I$ . Esse QPC está próximo o suficiente para que a variação na carga eletrostática do qubit influencie na sua taxa de tunelamento. Se essa variação  $\delta I$  for muito menor do que a corrente nominal  $I$ , a medição das flutuações da corrente realiza uma medida Gaussiana fraca no sistema.

Temos uma farta gama de exemplos de aplicações experimentais desse procedimento, e.g. nas referências [42–45].

### Evolução não condicionada

A dinâmica do sistema combinado qubit-QPC (ou seja, marginalizando os banhos) é dada pela Hamiltoniana:

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_S + \hat{H}_{\text{QPC}} + \hat{H}_A, \quad (6.52)$$

respectivamente, a Hamiltoniana interna do sistema, a do QPC e a de acoplamento. As duas últimas são dadas por

$$\hat{H}_{\text{QPC}} = \sum_k \left( \omega_E \hat{e}_k^\dagger \hat{e}_k + \omega_D \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k \right) + \sum_{k,q} \left( \tau_{kq} \hat{e}_k^\dagger \hat{d}_q + \tau_{qk}^* \hat{d}_q^\dagger \hat{e}_k \right), \quad (6.53)$$

$$\hat{H}_A = \sum_{k,q} \hat{c}^\dagger \hat{c} \left( \chi_{kq} \hat{e}_k^\dagger \hat{d}_q + \chi_{qk}^* \hat{d}_q^\dagger \hat{e}_k \right). \quad (6.54)$$

$\hat{c}^\dagger \hat{c} \equiv \hat{n}$  é o operador de número do qubit: ou seja, vale 1 se o qubit estiver no estado excitado e 0 se estiver no fundamental;  $\hat{e}_k$  e  $\hat{d}_k$  são os operadores de aniquilação do campo fermiônico de número de onda  $k$  no reservatório esquerdo e direito, cujas energias internas são, respectivamente,  $\omega_{E(D)}$ .  $\tau_{kq}$  é a matriz de tunelamento entre o estado  $k$  no reservatório da esquerda e  $q$  no da direita na ausência da interação com o sistema. Note, no entanto, que se, e somente se, o qubit se encontra ocupado,  $\langle \hat{n} \rangle \equiv \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle = 1$ , e a amplitude efetiva desse tunelamento muda para  $\tau_{qk} + \chi_{kq}$ .

Podemos definir a Hamiltoniana de interação como:

$$\hat{H}_I = \sum_{k,q} \left[ (\tau_{kq} + \hat{n} \chi_{kq}) \hat{e}_k^\dagger \hat{d}_q + (\tau_{qk}^* + \hat{n} \chi_{kq}) \hat{d}_q^\dagger \hat{e}_k \right]. \quad (6.55)$$

Por fim, definimos que os banhos agem no qubit como os operadores de pulso:

$$\hat{L}_1 = \gamma_1 \hat{c}^\dagger, \quad \hat{L}_2 = \gamma_2 \hat{c}, \quad (6.56)$$

ou seja: excitações entram apenas pelo banho 1 e saem apenas para o banho 2 (ver fig. 6.1).

Seguindo o mesmo procedimento da seção 3.3, chegamos, no espaço de Hilbert redu-

zido do sistema, à equação mestra quântica:

$$d\rho(t) = dt \left( -i[\hat{H}_S, \rho(t)] + \gamma_1 \mathcal{D}[\hat{c}^\dagger]\rho(t) + \gamma_2 \mathcal{D}[\hat{c}]\rho(t) + \mathcal{D}[\mathcal{T} + \hat{n}\mathcal{X}]\rho(t) \right) \quad (6.57)$$

onde, evidentemente, é necessário assumir que, assim como os banhos 1 e 2, os dois reservatórios do QPC e seu acoplamento com o sistema satisfazem as hipóteses necessárias mencionadas naquela seção (equilíbrio térmico, acoplamento fraco, etc.). Em particular, isso implica que  $eV, k_B T \ll \mu_{E(D)}$ , onde  $eV \equiv \mu_E - \mu_D$  é a diferença de potencia entre os reservatórios (assumindo que  $\mu_E > \mu_D$ ),  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura [21].  $\mathcal{D}[\hat{c}^{(\dagger)}]$  corresponde à interação entre o sistema e os banhos. Os demais parâmetros são  $\mathcal{T} = \alpha\tau_{00}$  e  $\mathcal{X} = \alpha\chi_{00}$ , onde  $\tau_{00}$  e  $\chi_{00}$  são a amplitude de tunelamento perto do potencial químico médio e  $\alpha^2 \equiv 2\pi eV g_E g_D$ , onde  $g_{E(D)}$  é a matriz densidade independente da energia do banho fermiônico esquerdo (direito).

Deste modo, a amplitude de tunelamento média sem ou com o elétron no qubit, respectivamente  $D$  e  $D'$ , são

$$D = |\mathcal{T}|^2 \quad > \quad D' = |\mathcal{T} + \mathcal{X}|^2. \quad (6.58)$$

Note que a dinâmica média (*não condicionada*) da ocupação  $\hat{n}$  do qubit é independente da presença do QPC, pois

$$[\hat{H}_{\text{QPC}}, \hat{n}] = 0 = [\hat{H}_A, \hat{n}] \quad (6.59)$$

de fato, para  $\langle \hat{n} \rangle(t) = \text{Tr}[\hat{c}^\dagger \hat{c} \rho(t)] \Rightarrow \frac{d\langle \hat{n} \rangle(t)}{dt} = \text{Tr}\left[\hat{n} \frac{d\rho(t)}{dt}\right]$ , e, após substituirmos a equação (6.57) em  $d\rho(t)$ , notamos que o último termo se cancela pois, pela ciclicidade do traço,

$$\text{Tr}[\hat{n} \mathcal{D}[\hat{n}]\rho(t)] = 0 \quad (6.60)$$

e os demais podem ser simplificados para:

$$\frac{d\langle \hat{n} \rangle(t)}{dt} = \gamma_1 (1 - \langle \hat{n} \rangle(t)) + \gamma_2 \langle \hat{n} \rangle(t). \quad (6.61)$$

Note que assim como os sistemas simulados do capítulo anterior, esse também tende a

um estado estacionário:

$$\rho_{ss} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} |1\rangle\langle 1| + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} |0\rangle\langle 0|. \quad (6.62)$$

### Processo pontual e corrente difusiva

Assim como nos sistemas do capítulo 4, a dinâmica estocástica *do qubit* é dada pelo processo pontual:

$$\left( dN_{1(2)} \right)^2 = dN_{1(2)}, \quad (6.63)$$

$$E[dN_1] = dt\gamma_1 \langle 1 - \hat{n} \rangle_c(t) = dt\gamma_1 \text{Tr}[\mathcal{J}[\hat{c}^\dagger]\rho_c(t)], \quad (6.64)$$

$$E[dN_2] = dt\gamma_2 \langle \hat{n} \rangle_c(t) = dt\gamma_2 \text{Tr}[\mathcal{J}[\hat{c}]\rho_c(t)], \quad (6.65)$$

onde  $\langle \cdot \rangle_c \equiv \text{Tr}[\cdot \rho_c]$  indica que o valor esperado é tirado com relação ao estado *condicionado* do sistema,  $\rho_c$ .

Analogamente, podemos também definir o processo pontual dos tunelamentos através do QPC:

$$\left( dM \right)^2 = dN, \quad (6.66)$$

$$E[dM] = dt \text{Tr} \left[ \mathcal{D}[\mathcal{T} + \hat{n}\mathcal{X}]\rho_c(t) \right] = dt \left( D + (D' - D) \langle \hat{n} \rangle_c(t) \right) \quad (6.67)$$

ou seja, para  $e$  a carga do elétron, a corrente que passa através do QPC é dada por

$$I(t) = e \frac{dM(t)}{dt} = \begin{cases} eD, & \text{se o qubit estiver vazio,} \\ eD', & \text{se o qubit estiver ocupado.} \end{cases} \quad (6.68)$$

Supondo que  $D, D' \gg \gamma_1, \gamma_2$ , ou seja, que o primeiro processo (elétrons entrando e saindo do qubit) é muito mais lento do que o segundo (elétrons tunelando através do QPC), podemos redefinir a corrente como uma corrente difusiva estocástica:

$$\langle I \rangle_c(t) = eD + e(D' - D) \langle \hat{n} \rangle_c(t). \quad (6.69)$$

Ou seja, uma variável estocástica, que “pula” entre dois valores constantes ao longo de

sua evolução no tempo.

### Evolução condicionada

No entanto, tendo em vista modelar experimentos reais, o que de fato nos interessa é o contrário: monitorar a corrente  $\langle I \rangle(t)$  através do QPC e tentar, com ela, inferir o estado do qubit. Como geralmente não medimos os pulsos individuais de elétrons, essa medida é a que corresponde melhor aos resultados experimentais, mas essa aproximação apesar de boa, não é suficiente para descrever uma única trajetória [17]. Como veremos nos gráficos no próximo capítulo, o estado do qubit não é a única fonte de ruído na corrente. Há, além dos pulsos entre  $eD$  e  $eD'$ , muita flutuação de frequência mais alta que vem em função dos tunelamentos do QPC em si.

Para termos uma melhor descrição da corrente condicionada, podemos redefini-la como um processo de Wiener, e essas flutuações do QPC entram como ruído Gaussiano.

Antes de tirarmos o limite difusivo, a equação mestra condicionada pela corrente  $I$  é:

$$d\rho_I = dt \left( \mathcal{L}\rho_I + \mathcal{D}[\hat{M}]\rho_I \right) + \left( dM(t) - dt \langle \hat{M}^\dagger \hat{M} \rangle_I \right) \left( \frac{\hat{M}\rho_I\hat{M}^\dagger}{\langle \hat{M}^\dagger \hat{M} \rangle_I} - \rho_I \right) \quad (6.70)$$

para  $\hat{M} \equiv \mathcal{T} + \hat{n}\mathcal{X}$ , e  $\mathcal{L}$  contendo a dinâmica *não monitorada* dos pulsos entre o qubit e os banhos, canais  $\hat{L}_1$  e  $\hat{L}_2$ .

Supondo que  $|D' - D| \ll D$  (i.e.  $|\mathcal{T}| \gg |\mathcal{X}|$ ), podemos seguir a derivação da seção 6.2.2, e, no limite difusivo, a equação mestra condicionada pela corrente passa a ser:

$$d\rho_I = dt \left( \mathcal{L}\rho_I + \mathcal{X}^2 \mathcal{D}[\hat{n}]\rho_I \right) + dW \mathcal{X} \left( \{\hat{n}, \rho_I\} - 2\langle \hat{n} \rangle_I \rho_I \right) \quad (6.71)$$

o que equivale à equação (6.41) para  $(\alpha\hat{c}) \rightarrow \hat{n}$ , cuja corrente difusiva correspondente (eq. (6.43)) é a grandeza que de fato medimos:

$$\tilde{I}_{\text{dif}} = \mathcal{T}^2 + 2\mathcal{T} \left( \mathcal{X} \langle \hat{n} \rangle_I + \frac{dW}{dt} \right), \quad (6.72)$$

que, após subtrairmos a constante  $\mathcal{T}^2$  e normalizá-la, passa a ser:

$$I_{\text{dif}} = \mathcal{X} \langle \hat{n} \rangle_I + \frac{dW}{dt}. \quad (6.73)$$



Ou seja: a ocupação do qubit mais oscilações estocásticas. Desde que  $\mathcal{X}$  seja significativamente maior que 1 ( $= \text{Var}[dW/dt]$ ) e seja o termo dominante, poderemos claramente discernir o estado do sistema e se entrou ou saiu uma excitação.

## 6.4. Algoritmo da simulação numérica

Todas as simulações presentes no próximo capítulo foram realizadas utilizando a função `QuantumDiffusion` (antiga `HomodyneSimulate`) da biblioteca *Melt!* [35] do Mathematica. Ele reproduz os resultados do artigo [46], em particular as equações (4) e (7). O propósito dessa função é, por meio de uma corrente difusiva de resultados de medições, como a da equação (6.73), obter como evolui o estado condicionado do sistema.

Em resumo, a função faz isso da seguinte maneira: toma como input (i) a matriz densidade do estado inicial  $\rho(t_0)$ , (ii) um intervalo de tempo fixo  $dt$ , (iii) a duração total da simulação  $t_f$ , (iv) um conjunto de operadores  $\hat{L}_i, i = 1, \dots, m$ , dos canais **não monitorados** de interação com o ambiente, e (v) um conjunto de operadores de medição fracos  $\hat{M}_j, j = 1, \dots, m', m' < m$ , dos canais **monitorados** pelo instrumento de medição. O seu objetivo é, para cada instante de tempo  $t_{n+1} = t_n + dt, n = 0, \dots, f$ , atualizar a matriz densidade do estado condicionado  $\rho_c(t_{n+1})$  em função da medição da corrente ao longo daquele incremento.

Primeiro define um operador de medição de resultado nulo  $\hat{K}_0$  (análogo ao  $\hat{M}_0$  da eq. (4.35)):

$$\hat{K}_0 = \hat{1} - dt \left( i\hat{H} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m'} \hat{M}_j^\dagger \hat{M}_j \right). \quad (6.74)$$

Define também as quadraturas  $\hat{x}_j = \hat{M}_j + \hat{M}_j^\dagger$  e o incremento de Wiener: para cada instante de tempo  $t_n$  e canal monitorado  $j$ , uma variável aleatória  $dW_j(t_n)$  com distribuição normal de média 0 e desvio padrão  $\sqrt{dt}$ .

Para cada passo da simulação é dada a integral da corrente de medições ao longo daquele intervalo infinitesimal:

$$dI_j(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} I_j(t) dt = \langle \hat{x}_j \rangle(t_n) dt + dW_j(t_n), \quad (6.75)$$

onde usamos a equação (6.73) para  $I_j(t)$ . Esse termo corresponde a um discretização da

corrente, cada  $dI_j(t_n)$  é o “agregado” dos resultados da medição do canal  $j$  ao longo do intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1})$ . Encontra-se, assim, o operador de medição

$$\hat{K}(t_n) = \hat{K}_0 + \sum_{j=1}^{m'} \hat{M}_j dI_j(t_n) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m'} \hat{M}_j \hat{M}_k (dW_j(t_n) dW_k(t_n) - \delta_{j,k} dt), \quad (6.76)$$

onde  $\delta_{j,k}$  é o delta de Kronecker, e, novamente, tivemos de manter os termos em segunda ordem por conta do incremento de Wiener. Esse operador corresponde à contribuição do resultado nulo, mais a contribuição de cada operador de medição ponderado pelo agregado do seu resultado durante o intervalo (*i.e.*  $dI_j(t_n)$ ), mais a contribuição dos termos cruzados.

Enfim, o estado condicionado é dado por:

$$\rho_c(t_{n+1}) = \frac{\hat{K}(t_n)\rho(t_n)\hat{K}^\dagger(t_n) + dt \sum_{i=1}^m \hat{L}_i \rho(t_n) \hat{L}_i^\dagger}{\text{Tr} \left[ \hat{K}(t_n)\rho(t_n)\hat{K}^\dagger(t_n) + dt \sum_{i=1}^m \hat{L}_i \rho(t_n) \hat{L}_i^\dagger \right]}. \quad (6.77)$$

Ou seja, a evolução condicionada pela medida  $\hat{K}$ , mais a contribuição da evolução não condicionada dos operadores de interação com o ambiente  $\hat{L}_i$  (*não* condicionada, justamente, pois não estão sendo monitorados).

# 7

## Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

### 7.1. Modelo

Adotaremos as mesmas convenções apresentadas na seção 5.1. No entanto, uma diferença fundamental entre os dois protocolos de medição é que na detecção direta a interação entre o sistema e os banhos e a medição do sistema acontecem por meio dos mesmos operadores. A consequência natural é que podemos apenas medir diretamente o qubit em interação com o ambiente. No QPC, entretanto, a medição é independente da interação com o ambiente. Deste modo, temos agora quatro combinações possíveis de set-ups a simular: dois modelos de interação com o banho (análogos ao modelo 1 (figura 5.2a) e modelo 2 (figura 5.2b) do capítulo 5), e, para cada, podemos medir o estado de qualquer um dos dois qubits<sup>1</sup>. Na figura 7.1 pode-se ver um esquema desses quatro set-ups.

A hamiltoniana interna permanece a mesma da do protocolo de medição anterior (5.1):

$$\hat{H} = h(\hat{\sigma}_z^1 - \hat{\sigma}_z^2) + \alpha(\hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^1 \hat{\sigma}_y^2), \quad (7.1)$$

onde fixamos os parâmetros  $h = \alpha = 1$ .

Outra distinção com relação à detecção direta é que agora temos três parâmetros de acoplamento. Além dos já conhecidos  $\gamma_1$  com o banho 1 (de entrada) e  $\gamma_2$  com o banho 2

---

<sup>1</sup>Podemos também medir ambos os qubits simultaneamente. Essas simulações foram realizadas, mas não serão apresentadas pois não diferem significativamente da distribuição de cada qubit quando monitorado individualmente.

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

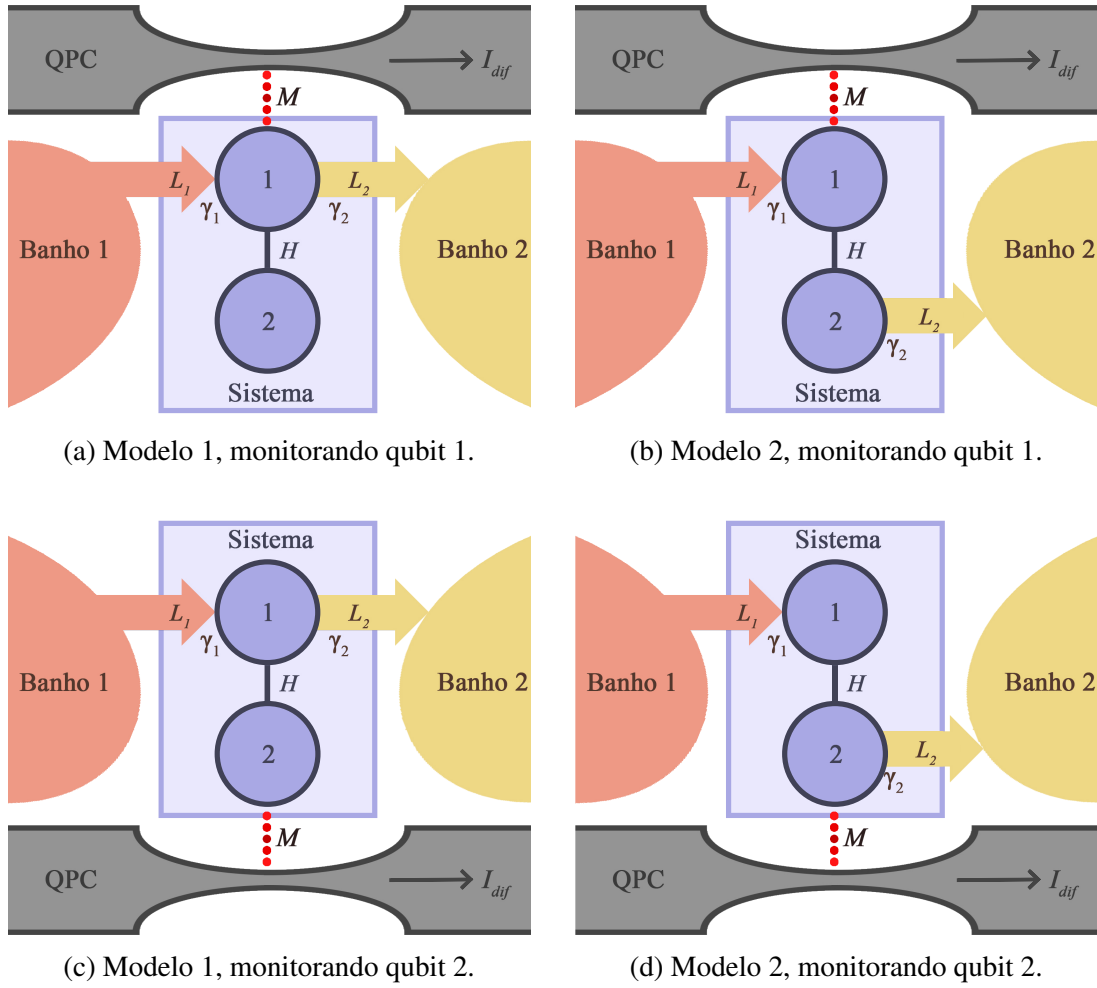


Figura 7.1: Esquema dos set-ups para a medição por QPC de um sistema aberto de dois qubits.

(de saída), temos também  $\xi$ , o acoplamento com o QPC. Para facilitar a compreensão dos gráficos, eles serão plotados, novamente, em função de  $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$  e  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ . Deste modo, temos dois operadores de pulo **não monitorados**:

$$\hat{L}_1 \equiv \sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_+^1 = \sqrt{\gamma(1 + \Delta\gamma)} \hat{\sigma}_+^1, \quad (7.2)$$

$$\hat{L}_2^{(i)} \equiv \sqrt{\gamma_2} \hat{\sigma}_-^i = \sqrt{\gamma(1 - \Delta\gamma)} \hat{\sigma}_-^i, \quad (7.3)$$

onde  $i = 1, 2$  depende do modelo, e um operador da interação com o QPC, **monitorado**:

$$\hat{M}^{(j)} \equiv \sqrt{\xi} \hat{\sigma}_z^j, \quad (7.4)$$

onde  $j = 1, 2$  depende de qual qubit está sendo monitorado e  $\xi$  é a *eficiência de medição*,

*Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits*

---

valendo entre 0 e 1. Estes três parâmetros ( $\gamma$ ,  $\Delta\gamma$  e  $\xi$ ) podem ser variados livremente. Na próxima seção (sec. 7.2), quando apresentarmos os resultados das simulações, mostraremos como a variação de cada um deles interfere na dinâmica do sistema.

Assim, para essas condições, a implementação da simulação (eq. (6.77)) fica:

$$\rho_c(t_{n+1}) = \frac{\hat{K}^{(ij)}(t_n)\rho(t_n)\hat{K}^{(ij)\dagger}(t_n) + dt\left(\gamma_1\hat{\sigma}_+^1\rho(t_n)\hat{\sigma}_-^1 + \gamma_2\hat{\sigma}_-^i\rho(t_n)\hat{\sigma}_+^i\right)}{\text{Tr}\left[\hat{K}^{(ij)}(t_n)\rho(t_n)\hat{K}^{(ij)\dagger}(t_n) + dt\left(\gamma_1\hat{\sigma}_+^1\rho(t_n)\hat{\sigma}_-^1 + \gamma_2\hat{\sigma}_-^i\rho(t_n)\hat{\sigma}_+^i\right)\right]}, \quad (7.5)$$

onde  $i = 1,2$  depende do modelo e

$$\begin{aligned} \hat{K}^{(ij)}(t_n) = & \hat{1} - dt\left(i\hat{H} + \frac{\gamma_1}{2}\hat{\sigma}_+^1\hat{\sigma}_-^1 + \frac{\gamma_2}{2}\hat{\sigma}_-^i\hat{\sigma}_+^i + \frac{\xi}{2}\hat{1}\right) \\ & + \xi\hat{\sigma}_z^j\left(2\text{dt}\text{Tr}[\hat{\sigma}_z^j\rho(t_n)] + \frac{dW(t_n)}{\sqrt{\xi}}\right), \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde  $j = 1,2$  indica qual qubit está sendo monitorado e  $dW$  é uma variável aleatória, conforme descrito na seção 6.4. Empregamos sempre  $dt = 0,01$ , pois era suficientemente curto para as grandezas em questão. Por consequência, o desvio padrão de  $dW$  será de 0,1.

Como os gráficos das evoluções difusivas são, naturalmente, mais ruidosos do que os da detecção direta, além de que a equação mestra difusiva (6.73) não preserva estados puros, mostrar as quatro curvas dos valores das diagonais principais da matriz densidade, como foi feito no capítulo 5, não seria muito legível. Optamos, assim, por mostrar as duas curvas do estado excitado da matriz densidade reduzida de cada qubit, exceto quando explicitamente indicado.

Toda vez que comparamos simulações para diferentes parâmetros  $\gamma$ ,  $\Delta\gamma$  ou  $\xi$ , mantivemos fixa a semente para a geração da variável aleatória  $dW$ . Ou seja, para todas as simulações de trajetórias da próxima seção, para cada instante  $t_n$ ,  $dW(t_n)$  tem exatamente o mesmo valor<sup>2</sup>. Isso facilita visualizar certas propriedades, que serão descritas mais a frente.

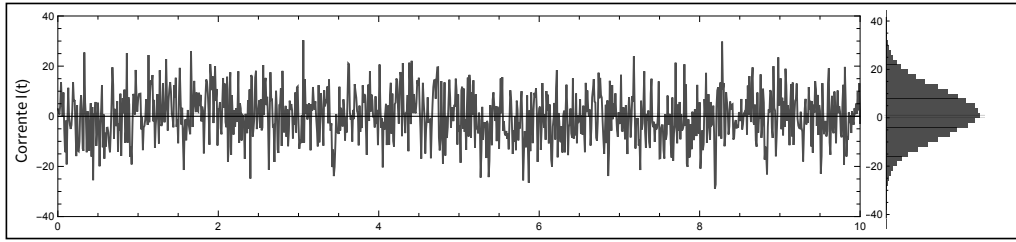
---

<sup>2</sup>Recode-se que na simulação de processo pontual um novo número aleatório era gerado após cada pulo, encadeando que, exceto pelo pulo inicial, todas as simulações eram independentes (rever sec. 4.2). Aqui, em contrapartida, todos os  $dW(t_n)$ , para todo  $t_n$ , são gerados no início da simulação. Deste modo, podemos comparar como diferentes evoluções em função de diferentes parâmetros reagem ao mesmo ruído.

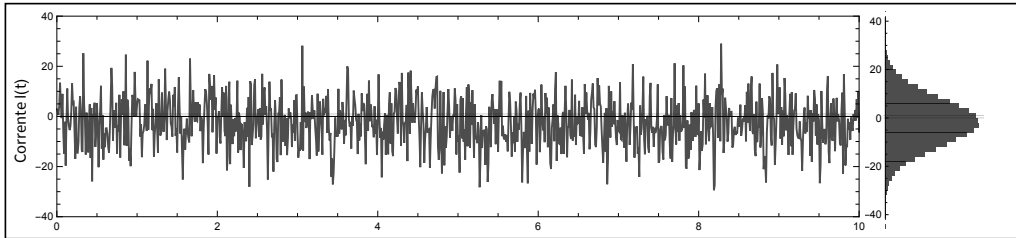
## 7.2. Resultado das simulações

### 7.2.1. Trajetórias quânticas do sistema de dois qubits

#### Corrente difusiva de resultados de medição



(a) Corrente de resultados para  $\Delta\gamma = 0,9$ .

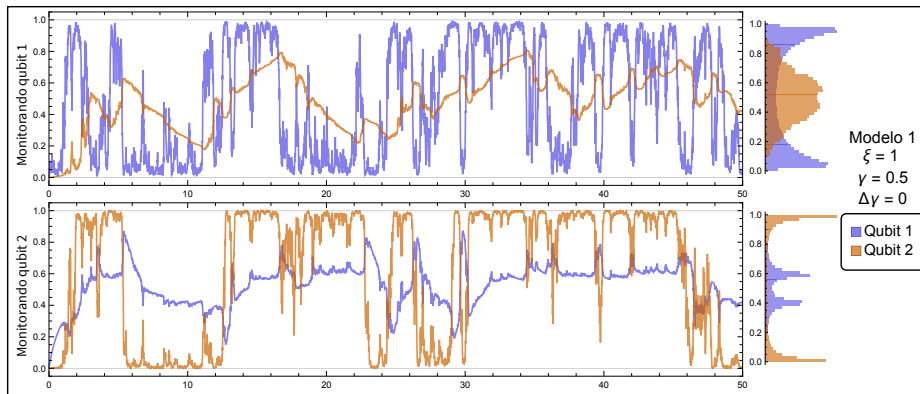
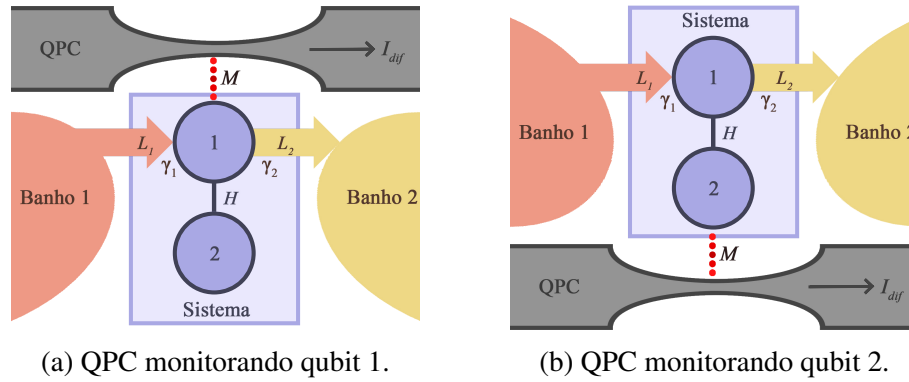


(b) Corrente de resultados para  $\Delta\gamma = -0,9$ .

Figura 7.2: Simulação da corrente difusiva de resultados de medição para dois valores de  $\Delta\gamma$  no modelo 1, monitorando o qubit 1. À direita vemos um histograma resultado da marginalização no tempo dos valores da corrente. Os demais parâmetros  $\xi = 1$  e  $\gamma = 0,5$  foram mantidos fixos.

Nosso primeiro impulso seria analisar as correntes de resultados de medição simuladas, mas, como podemos imediatamente verificar com a figura 7.2, o ruído domina todas as simulações. A título de exemplo, a única diferença perceptível entre as duas simulações acima é que o valor médio da corrente para  $\Delta\gamma = 0,9$  é  $E[I_{\text{dif}}] = 1,88$  e para  $\Delta\gamma = -0,9$  é  $E[I_{\text{dif}}] = -1,73$  — para uma distribuição com variância de 102. Diminuindo  $\xi$  ou  $\gamma$  para seus valores mínimos, vemos apenas uma diminuição da variância para 100. A única maneira de analisar de forma significativa as trajetórias desse sistema é obtendo o seu estado condicionado por meio da equação 7.5, e é isso o que faremos nas próximas seções.

Dependência nos parâmetros de acoplamento com os banhos  $\gamma$



(c) Trajetórias do estado reduzido dos dois qubits no modelo 1 para os dois monitoramentos. À direita, apresenta-se a marginalização no tempo da ocupação do qubit. O eixo  $y$  corresponde à componente excitada (*i.e.* a ocupação) da matriz densidade reduzida dos qubits:  $\langle 1|\rho_1|1\rangle$  (curva azul) e  $\langle 1|\rho_2|1\rangle$  (curva laranja).

Figura 7.3: Trajetórias para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  e  $\xi = 1$ . O gráfico de cima corresponde ao caso da figura 7.3a, onde o qubit 1 (o em contato com os banhos) é monitorado pelo QPC. O gráfico de baixo, ao caso da figura 7.3b, em que o qubit 2 (o isolado) é monitorado. Os histogramas da marginalização no tempo da ocupação dos qubits foram calculados utilizando simulações de duração de 1000 unidades de tempo, com intervalos  $dt = 0.01$  (ou seja: total de 10 mil passos). Como cada gráfico depende de quatro parâmetros, eles sempre serão indicados à direita, acima da legenda, para evitar confusão.

Assim como fizemos na seção 5.2, explicaremos mais em detalhe o primeiro gráfico, para facilitar a leitura dos seguintes. Na figura 7.3c, vemos dois gráficos de evolução da trajetória para os mesmos parâmetros no modelo 1: o primeiro, de cima, corresponde a quando o qubit 1 é monitorado (fig. 7.3a) e o segundo, de baixo, corresponde a quando o qubit 2 é monitorado (fig. 7.3b). Esses gráficos sempre serão mostrados em pares, sempre

na mesma ordem. Isso pois a comparação entre as evoluções do sistema em função de qual qubit está sendo monitorado é um dos aspectos que mais nos interessa. À direita de cada curva, vemos um histograma. Ele corresponde à integração no tempo de cada estado. Esses histogramas foram calculados utilizando simulações de duração de 1000 unidades de tempo (apenas as primeiras 50 foram plotadas nos gráficos das trajetória para facilitar a leitura). A função dos histogramas é identificar os comportamentos dos estados dos qubits além das flutuações estocásticas.

Analisando apenas os gráficos da figura 7.3c, já podemos estudar algumas características típicas da dinâmica dos estados reduzidos:

**1. Qubits monitorados:** Para ambos os casos, o qubit sendo monitorado apresenta uma versão ruidosa do **efeito de Zeno quântico** [19]: seja um observável  $\hat{A} = \sum_n a_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ , onde assumimos que a base  $\{|\psi_n\rangle\}$  é composta por estados puros e não degenerados, por simplicidade. Após a primeira medição, obtém-se o resultado  $a_n$  e o sistema colapsa para o estado  $|a_n\rangle$ . Em seguida, o sistema evolui para  $|\psi(t)\rangle = e^{i\hat{H}t} |\psi_n\rangle$ , onde  $\hat{H}$  é a Hamiltoniana. Se a medição for repetida após um intervalo curto de tempo  $\delta t$ , a probabilidade dele ainda se encontrar no mesmo estado é:

$$\begin{aligned} p_{nn}(\delta t) &= |\langle\psi_n|\psi(\delta t)\rangle|^2 \approx |\langle\psi_n|(1 - i\hat{H}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2))|\psi_n\rangle|^2 \\ &= 1 - (\langle\psi_n|\hat{H}^2|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|\hat{H}|\psi_n\rangle^2)\delta t^2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

No limite  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} p_{nn}(\delta t) = 1$ , e o sistema nunca muda de estado.

Nos gráficos da figura 7.3c, apenas não vemos um efeito de Zeno pleno nas trajetórias dos qubits monitorados, onde o estado nunca sai de  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , por conta de  $dt$  ser finito, da interação com os banhos, que age no sistema fazendo com que ele perca coerência, e das flutuações aleatórias provocadas por  $dW$ . Na figura 7.4, vemos a evolução do sistema para acoplamentos com o banho mais fracos, e é fácil notar que o efeito de Zeno domina. Na simulação para  $\gamma = 0,01$ , inclusive, o sistema não sai de  $|00\rangle\langle 00|$  até o instante  $t = 310$ , e, próximo a  $t = 450$ , volta a ficar “preso” em  $|11\rangle\langle 11|$  (ver histogramas). Analisaremos mais a fundo essa figura logo a seguir.

**2. Qubit não monitorado, frequências altas:** Em ambos os gráficos da figura 7.3 (e mais claramente ainda na simulação para  $\gamma = 0,01$  da figura 7.4), podemos ver que quando o



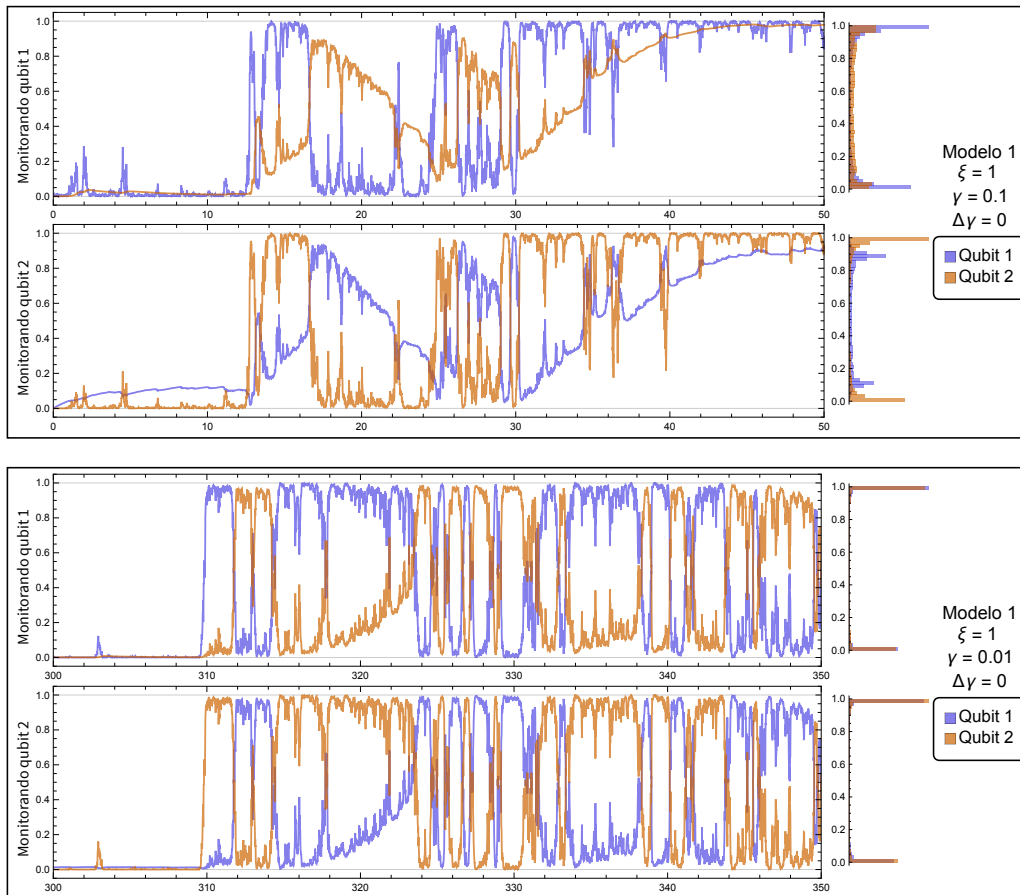


Figura 7.4: Trajetórias do estado reduzido dos dois qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para o parâmetro  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,1$  e para  $\gamma = 0,01$ . Pode-se claramente perceber que a influência do QPC domina as trajetórias. Atente que o gráfico da trajetória para  $\gamma = 0,01$  começa em  $t = 300$ , pois este é o primeiro pulso do qubit monitorado.

qubit monitorado salta do estado excitado para o fundamental (vamos, por simplicidade, dizer que ele se encontra em  $|1\rangle|1\rangle$  ou  $|0\rangle|0\rangle$ , mesmo que na prática ele se encontre em um estado *próximo a*  $|1\rangle|1\rangle$  ou  $|0\rangle|0\rangle$ ) o qubit não monitorado faz um salto na direção oposta. Isso corresponde à probabilidade de transferência da excitação de um qubit para o outro. Quando ela é mais alta do que a entrada/saída de excitações pelo/para o ambiente, esse comportamento domina (figura 7.4,  $\gamma = 0.01$ ), quando as duas são de magnitude comparável (figura 7.3), o pulso é mais curto. Uma análise mais aprofundada será feita na próxima seção, quando discutirmos as WTDs (seç. 7.3).

**3. Qubit não monitorado, frequências baixas:** Há, também, um comportamento de longa duração: se o qubit monitorado se encontra em um estado, o qubit não monitorado tende lentamente ao mesmo estado. No entanto, há uma distinção significativa entre os

comportamentos para cada um dos qubits: quando monitoramos o qubit 1, a ocupação do qubit 2 tende lentamente para 0 ou 1, mas, para  $\gamma$  grande (figura 7.3), não dá tempo de chegar lá antes do próximo pulso ocorrer, levando a distribuição do histograma a se assemelhar a uma Gaussiana com o topo cortado. Para  $\gamma$  pequeno (figura 7.4), o estado consegue chegar às extremidades, o que pode ser visto pelos picos nos histogramas. Quando o qubit 2 é monitorado, no entanto, o estado excitado do qubit 1 estabiliza em um estado estacionário intermediário (mais facilmente distinguível na figura 7.3), e esses estados estacionários vão se aproximando de  $|0\rangle\langle 0|$  e  $|1\rangle\langle 1|$  a medida que diminuimos  $\gamma$  (figura 7.4). Isso se dá porque a interação com os banhos, que nesse modelo é exclusiva do qubit 1, impõe que seu estado não seja puro, visto que a todo instante há a incerteza de se uma excitação entrou ou saiu do sistema.

Confirmamos esta última análise olhando para as trajetórias do modelo 2 (figura 7.5). Para  $\gamma$  grande, vemos nos histogramas que o qubit 1 (quando não monitorado) tem um pico só, próximo de 1 (pois por meio dele *entram* excitações no sistema) e o qubit 2 (quando não monitorado) tem um pico perto de 0 (pois por meio dele *saem* excitações do sistema). A medida que  $\gamma$  diminui, surge um segundo pico na extremidade oposta, em 0 e 1, respectivamente.

Esses comportamentos ficam explícitos quando analisamos a forma matricial dos operadores  $\hat{K}^{(ij)}(t_n)$  (eq. (7.5)), que ditam a evolução condicionada.  $\hat{K}^{(11)}(t_n)$ , no modelo 1, monitorando o qubit 1 (fig. 7.1a), por exemplo, fica:

$$\hat{K}^{(11)}(t_n) = \left(1 - dt \frac{\xi}{2}\right) \mathbb{I}_4 - dt \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_1 + 2ih & 2i\alpha & 0 \\ 0 & 2i\alpha & \frac{1}{2}\gamma_2 - 2ih & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_2 \end{pmatrix} + 2\xi \left[ dt(\rho_{11}(t_n) + \rho_{22}(t_n) - \rho_{33}(t_n) - \rho_{44}(t_n)) + \frac{dW(t_n)}{2\sqrt{\xi}} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

onde relembramos que  $h$  e  $\alpha$  são os parâmetros da Hamiltoniana e  $\rho_{ab}$  é componente  $a \times b$  da matriz densidade do sistema  $\rho$  na base  $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ . Monitorando o qubit 2

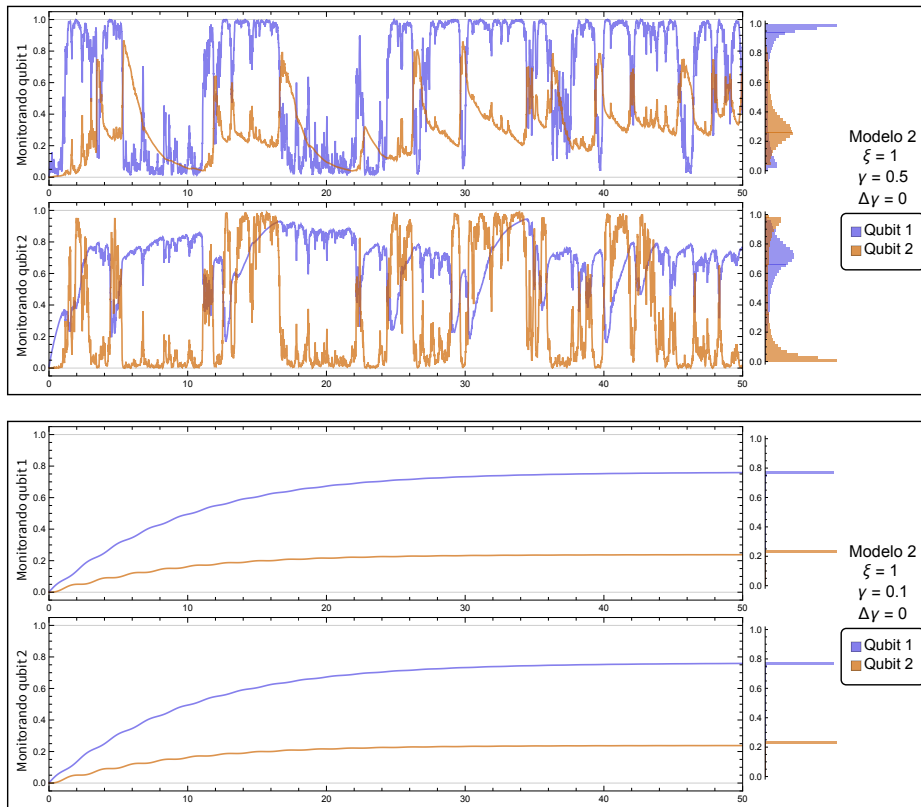
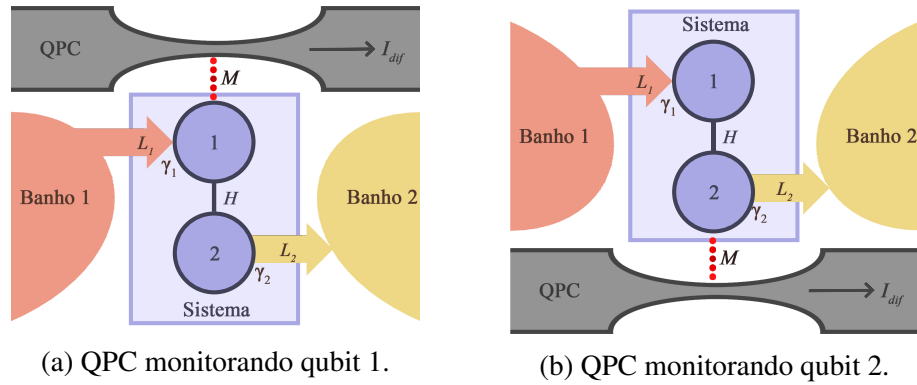


Figura 7.5: Trajetórias no modelo 2 para diferentes valores de  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  e  $\xi = 1$ . Todos os demais comentários na legenda da figura 7.3 sobre as simulações continuam válidos.

(fig. 7.1c), o único termo que muda é o último, que passa a ser:

$$\hat{K}^{(12)}(t_n) = \dots + 2\xi \left[ dt(\rho_{11}(t_n) - \rho_{22}(t_n) + \rho_{33}(t_n) - \rho_{44}(t_n)) + \frac{dW(t_n)}{2\sqrt{\xi}} \right] \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

E no modelo 2 (fig. 7.1b e 7.1b), o único termo de (7.8) que muda é o segundo, que passa a ser:

$$\hat{K}^{(2j)}(t_n) = \left(1 - dt \frac{\xi}{2}\right) \mathbb{I}_4 - dt \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + 2ih & 2i\alpha & 0 \\ 0 & 2i\alpha & -2ih & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (7.10)$$

para ambos os monitoramentos  $j$ .

Para cada iteração teremos duas dinâmicas competindo entre si, qual delas domina é determinado pela razão entre os  $\gamma$ s e  $\xi$  (dado que a Hamiltoniana é fixa): (i) dinâmica provocada pelo segundo termo (eq. (7.8) e (7.10)), dado pela Hamiltoniana e pelos operadores de interação com os banhos  $\hat{L}_i$ , que sozinha levaria o sistema a uma evolução análoga às não condicionadas do protocolo de detecção direta (figura 5.10); e (ii) a dinâmica provocada pelo terceiro termo (eq. (7.8) e (7.9)), a *back-action* do QPC, que colapsa o estado reduzido do qubit monitorado a  $|0\rangle\langle 0|$  ou  $|1\rangle\langle 1|$ , com pequenas flutuações infinitesimais provocadas por  $dW$  (que, para a nossa escolha de  $dt$ , tem desvio padrão de 0,1). Isso pois, a cada passo, o estado excitado  $\langle 1|\rho_j|1\rangle$  e o fundamental  $\langle 0|\rho_j|0\rangle$  do qubit monitorado  $j$  são multiplicados, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\langle 1|\rho_j|1\rangle \longrightarrow (\langle 1|\rho_j|1\rangle - \langle 0|\rho_j|0\rangle) \langle 1|\rho_j|1\rangle, \quad (7.11)$$

$$\langle 0|\rho_j|0\rangle \longrightarrow (\langle 0|\rho_j|0\rangle - \langle 1|\rho_j|1\rangle) \langle 0|\rho_j|0\rangle, \quad (7.12)$$

ou seja, se  $\langle 1|\rho_j|1\rangle > \langle 0|\rho_j|0\rangle$ , o estado do qubit monitorado tenderá para  $|1\rangle\langle 1|$ , mas se  $\langle 1|\rho_j|1\rangle < \langle 0|\rho_j|0\rangle$ , tenderá para  $|0\rangle\langle 0|$ .

Quando analisamos as trajetórias para  $\gamma$  muito pequeno, sejam as do modelo 1 na

figura 7.4 ou as do modelo 2 para  $\gamma = 0,1$  na figura 7.5, nota-se que os gráficos para os dois monitoramentos são muito semelhantes entre si. Isso se dá pois quem domina é a influência do QPC e, como já mencionado, os valores aleatórios de  $dW(t)$ , para todo  $t$ , são os mesmos em todas as simulações. Deste modo, a trajetória do qubit 1 quando monitorado é quase igual à do qubit 2 quando monitorado. Nota-se, inclusive, que para o mesmo  $\gamma = 0,1$ , as semelhanças entre as trajetórias estão presentes entre os dois modelos. As trajetórias dos qubits não monitorados diferem um pouco mais entre si por estar interagindo apenas indiretamente com o QPC e, portanto, ter seu efeito atenuado com relação ao dos banhos.

### **Dependência na diferença entre parâmetros de acoplamento $\Delta\gamma$**

Assim como feito no capítulo 5, prosseguimos comparando como a variação da diferença entre os dois acoplamentos com o banho  $\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$  influencia a dinâmica do sistema. Primeiro fixamos  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . Na figura 7.6 e na figura 7.7 vemos os resultados das simulações para, respectivamente, o modelo 1 e o modelo 2 (fig. 7.1). As conclusões que podemos chegar não diferem muito das do capítulo 5:  $\Delta\gamma > 1$  (taxa de entrada de excitações maior do que a de saída) leva à preponderância de estados excitados e  $\Delta\gamma < 1$  (taxa de saída maior do que a de entrada) à estados fundamentais.

É curioso observar que os estados estacionários do qubit 1 não monitorado também sobem/descem correspondentemente, o que é refletido nos histogramas. Outro aspecto digno de nota é que, ignorando as flutuações aleatórias, há uma simetria entre as distribuições para valores positivos e negativos de  $\Delta\gamma$ . Isso pode ser mais claramente constatado através dos histogramas, que invertem em torno do valor médio 0,5. A diferença entre os dois modelos está que no modelo 2, como cada qubit está conectado com um dos banhos, esse espelhamento também envolve a troca do qubit (a distribuição do qubit 1 para  $\Delta\gamma = 0,3$  é o inverso da do qubit 2 para  $\Delta\gamma = -0,3$ , etc.)

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

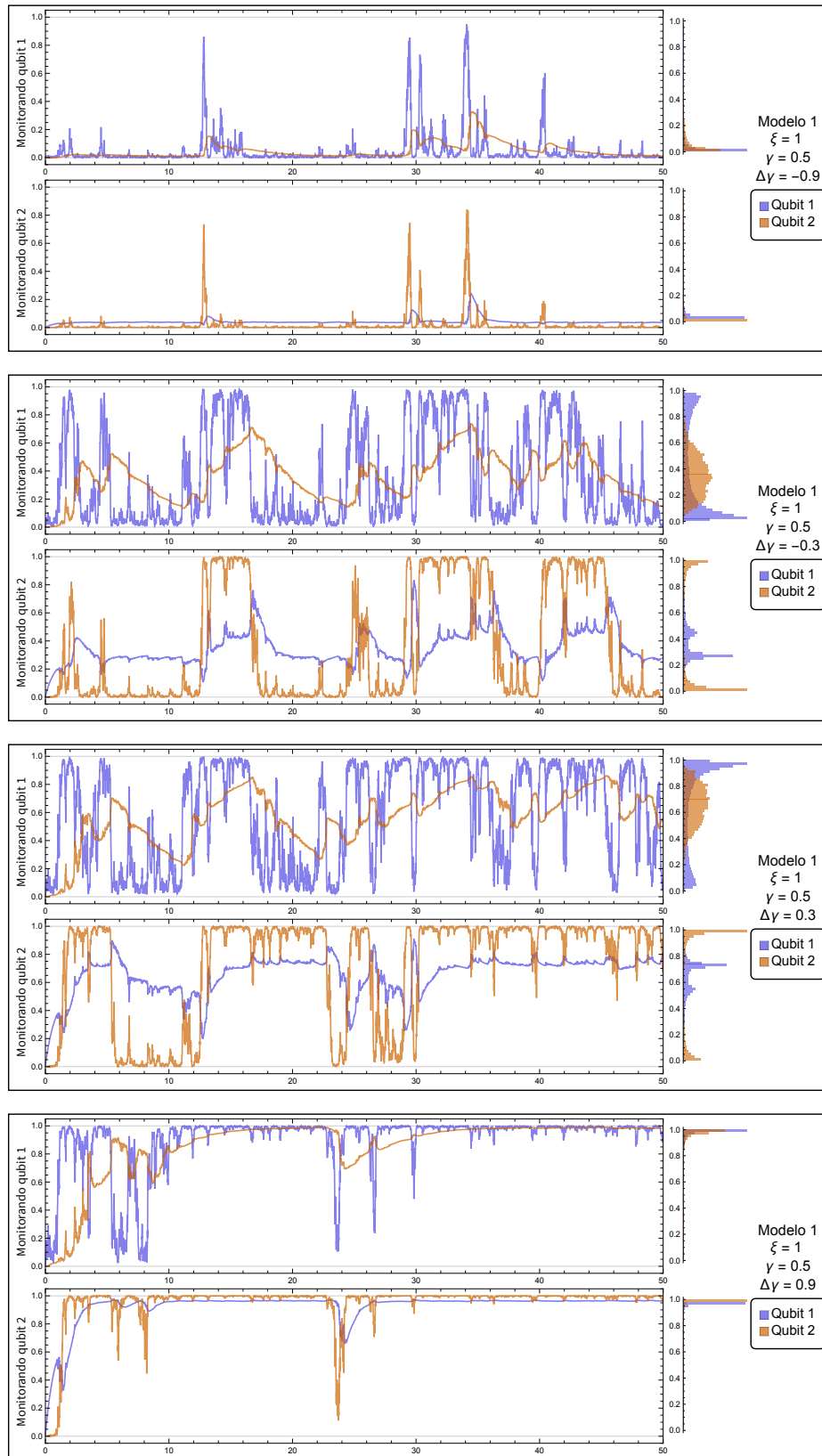


Figura 7.6: Trajetórias dos estados reduzidos no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes  $\Delta\gamma$  e  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  fixo.

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

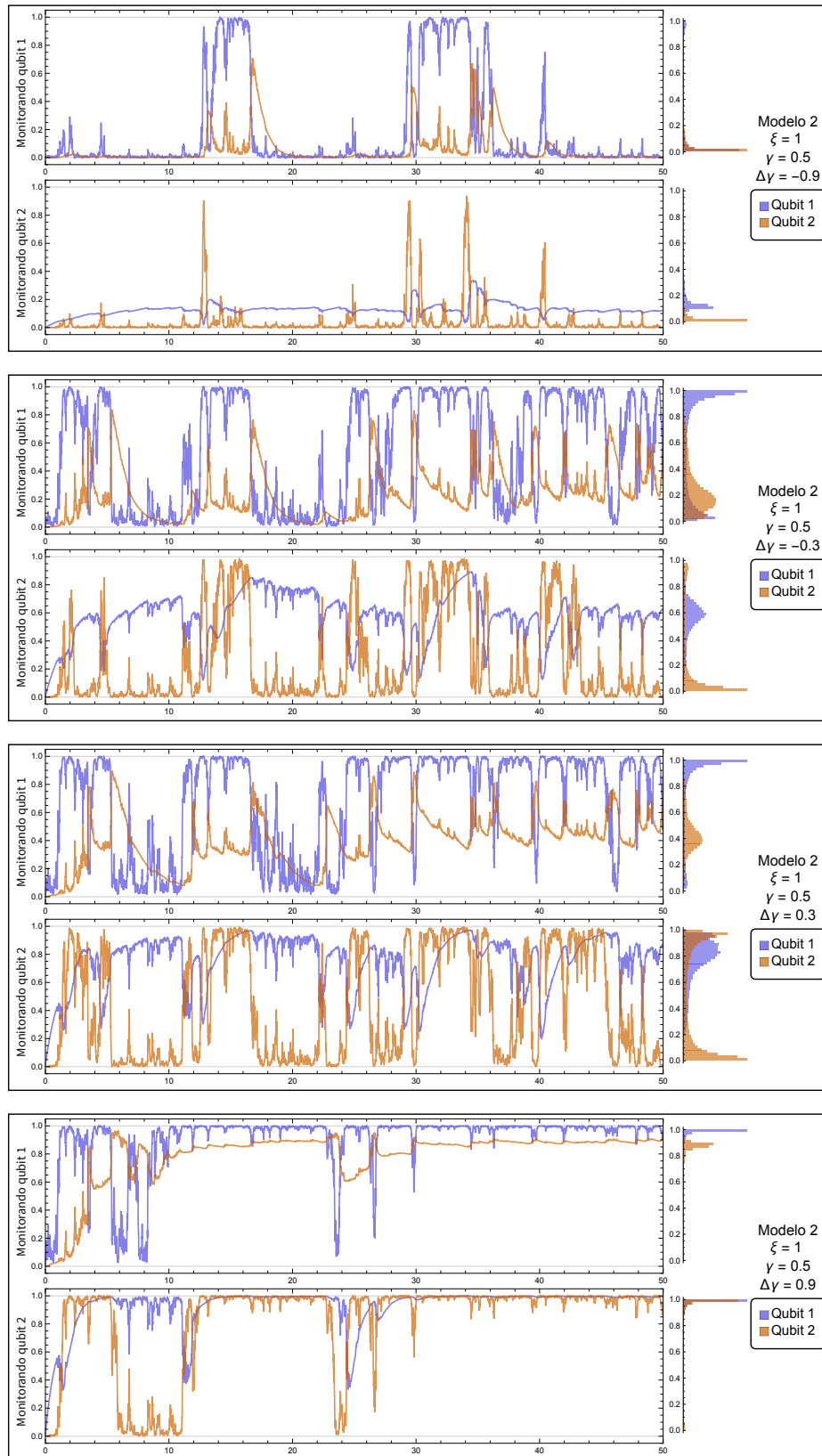


Figura 7.7: Trajetórias dos estados reduzidos no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes  $\Delta\gamma$  e  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  fixo.

### 7.2.2. Dependência na eficiência da medida $\xi$ e evolução não condicionada

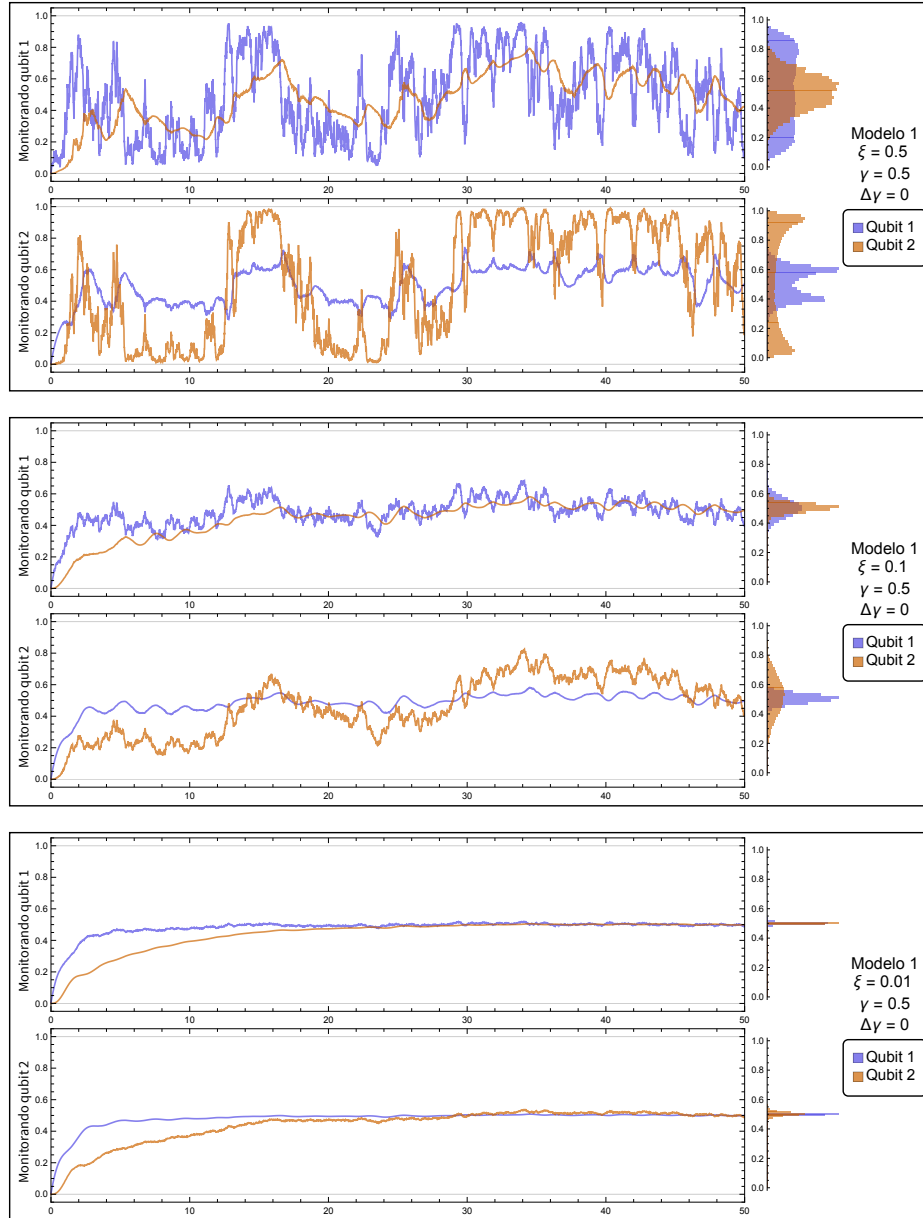


Figura 7.8: Trajetórias dos estados reduzidos no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes eficiências da medida  $\xi$ .

Podemos ver nas figuras 7.8 (modelo 1) e 7.9 (modelo 2) que, a medida que a eficiência da medida  $\xi$  diminui, menos a trajetória dos qubits monitorados se encontra colapsada em um dos autoestados  $|0\rangle\langle 0|$  e  $|1\rangle\langle 1|$  do operador de medição  $\hat{M}$  do QPC (eq. (7.4)). Em um primeiro momento, temos um alargamento das distribuições (ver gráficos para



Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

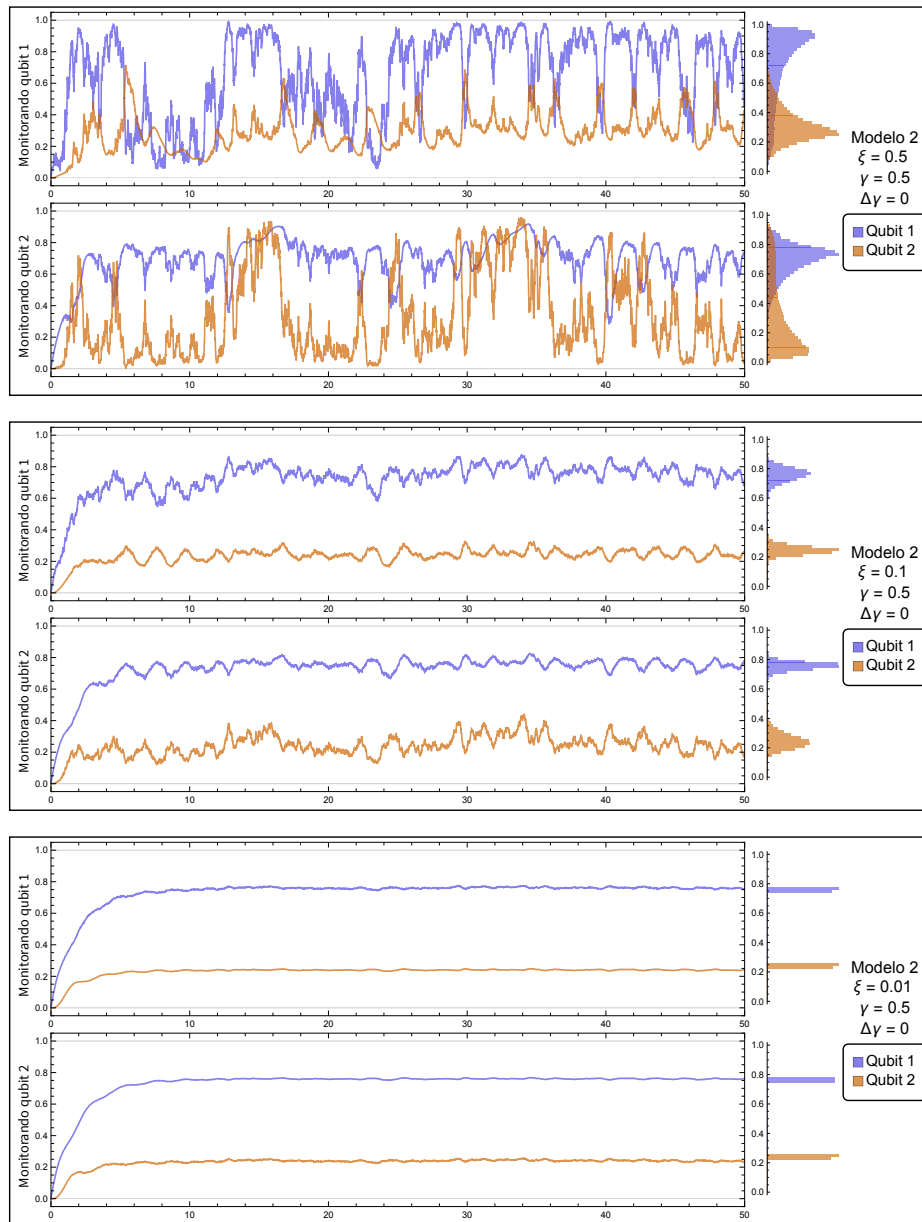


Figura 7.9: Trajetórias dos estados reduzidos no modelo 2 (fig. 7.1) p para diferentes eficiências da medida  $\xi$ .

$\xi = 0,5$ ), mas, a medida que nos aproximamos do limite  $\xi \rightarrow 0$ , as trajetórias tendem à evolução não condicionada (figura 7.10), pois a evolução passa a ser determinada unicamente pelos canais não monitorados. Os gráficos da figura 7.10 correspondem a exatamente a mesma evolução que vimos na figura 5.10 (para parâmetros  $\gamma = 0,5$  e  $\Delta\gamma = 0$ ), a única diferença sendo que aqui estamos plotando os estados reduzidos. Com respeito às diferenças entre as evoluções não condicionadas de um modelo comparado com o outro, estas continuam as mesmas do caso de detecção direta, descritas na seção 5.2.2.

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

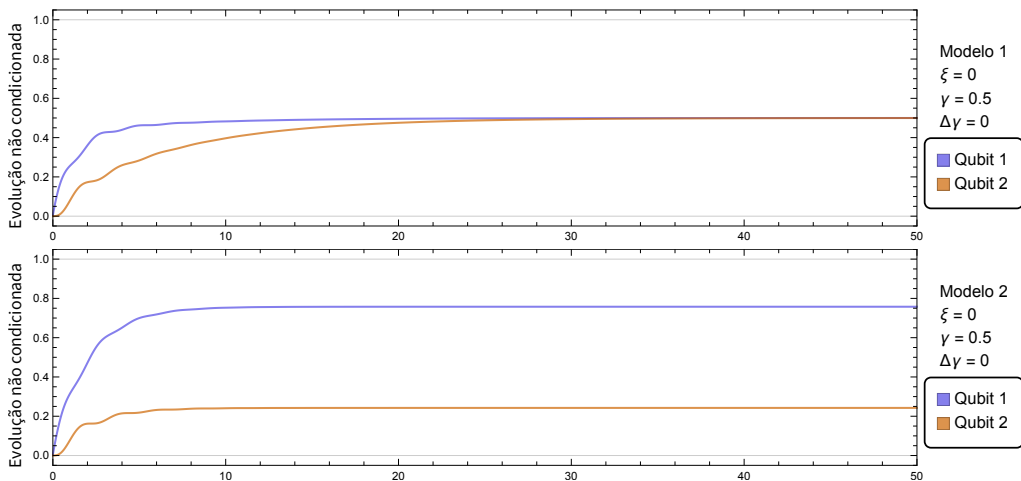


Figura 7.10: Evoluções não condicionadas do estado excitado nos dois modelos (fig. 7.1) para  $\xi = 0$ .

Uma propriedade digna de nota é que as evoluções não condicionadas também dependem de  $\xi$ . Na figura 7.11 vemos as evoluções não condicionadas dos dois modelos para eficiência de medição máxima  $\xi = 1$ . Nota-se que as oscilações iniciais, advindas da Hamiltoniana, antes do sistema atingir o estado estacionário, desaparecem. Isso acontece porque o efeito de Zeno quântico provocado pelo QPC, cuja variação entre 0 e 1 é estocástica, impede qualquer oscilação periódica de ser detectada na média.

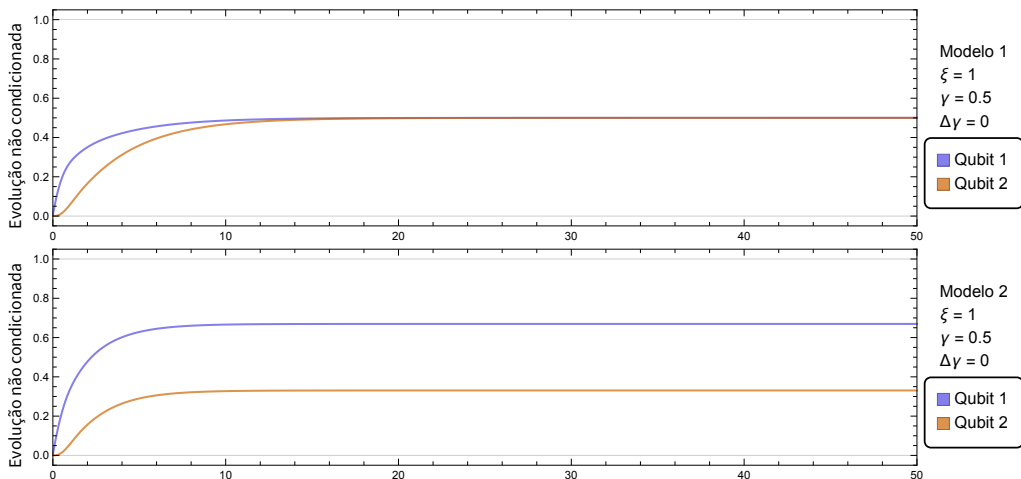


Figura 7.11: Evoluções não condicionadas do estado excitado nos dois modelos (fig. 7.1) para  $\xi = 1$ .

A presença do QPC aumenta a incerteza dos estados não condicionados. Podemos aferir isso analisando a variação do estado estacionário não condicionado dos qubits no modelo 2, na figura 7.12: quanto maior a eficiência de medição, mais os estado estacio-

nários dos dois qubits se aproximam. Não podemos verificar isso com o modelo 1 porque nele o estado estacionário já é maximamente misto para qualquer valor de  $\xi$ .

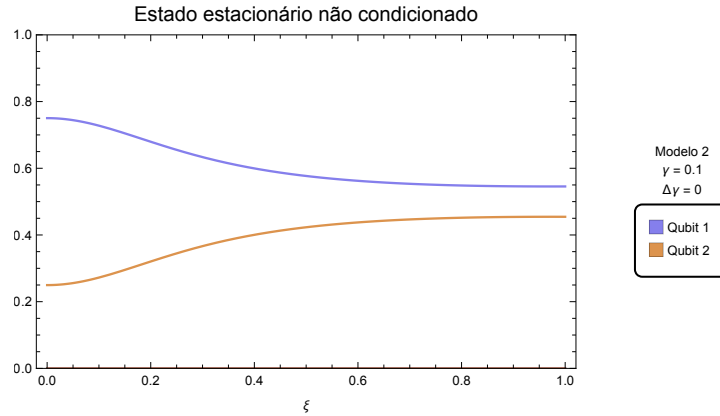


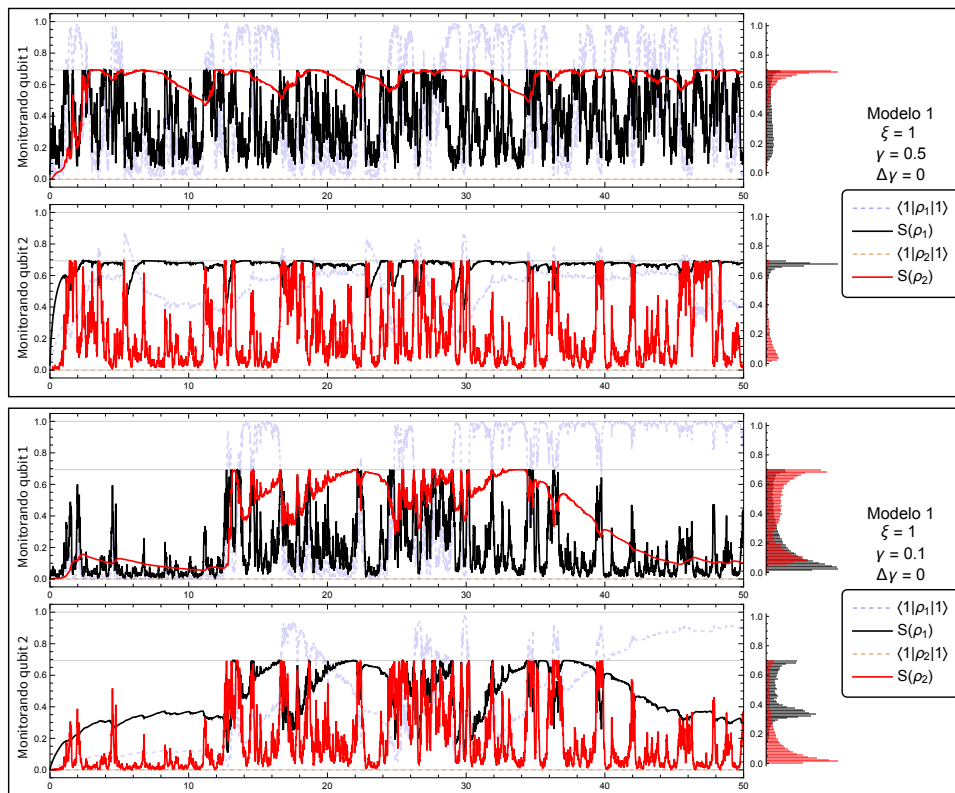
Figura 7.12: Componente excitada dos estados estacionários não condicionados dos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) em função de  $\xi$ . Essa variação apenas é perceptível para  $\gamma$  pequeno.

### 7.2.3. Evolução da entropia de von Neumann

Assim como feito na seção 5.2.3, podemos plotar a evolução da entropia de von Neumann  $S(\rho_j) = -\text{Tr}[\rho_j \log(\rho_j)]$  do estado reduzido do qubit  $j = 1,2$  para diferentes parâmetros. Diferentemente do mostrado naquela seção, como o estado do sistema total não mais se mantém puro, agora a entropia dos dois qubits não permanecerá igual. Recordamos que a entropia de um qubit é limitada por baixo por 0 e por cima por  $\log(2) \approx 0,69$ .

Na figura 7.13, vemos a evolução da entropia de von Neumann dos dois qubits no modelo 1 para os dois monitoramentos e para dois valores do acoplamento com os banhos  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ . O comportamento mais evidente que se nota é que a entropia é menor quando o qubit se encontra mais próximo dos estados puros  $|1\rangle\langle 1|$  ou  $|0\rangle\langle 0|$ , e que é máxima quando o estado reduzido é maximamente misto. De resto, o comportamento não difere muito do que o que já foi descrito sobre as trajetórias: o qubit monitorado tende a ter uma entropia muito menor mas com maior ruído em consequência da interação com o QPC, enquanto o não monitorado varia menos, se mantendo próximo a  $\log(2)$ . Para valores menores de  $\gamma$ , há tempo suficiente para o estado do qubit não monitorado se igualar ao do qubit monitorado, e o sistema se aproxima dos estados puros  $|00\rangle\langle 00|$  ou  $|11\rangle\langle 11|$ ,

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits



à Taysa: Mantive desse jeito porque o objetivo era mostrar como a entropia estava correlacionada com os estados reduzidos. Ver em detalhes os estados reduzidos não era relevante porque são os mesmos gráficos das figuras anteriores.

Figura 7.13: Trajetórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits  $S(\rho_j)$  sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes valores do acoplamento com os banhos  $\gamma \equiv \gamma_1 = \gamma_2$ . A linha em  $\log(2) \approx 0,69$  indica a entropia máxima de um qubit.

reduzindo a entropia de ambos os qubits. Quanto ao qubit monitorado, a medida que diminuimos a interação (não monitorada) com os banhos, a influência da monitoração pelo QPC passa a dominar a dinâmica geral, e pode-se claramente ver os histogramas se deslocarem mais para o zero, comprovando que o qubit tende a permanecer mais próximo dos autoestados (puros) do operador de medição  $\hat{M}$  do QPC (eq. (7.4)).

Na figura 7.14 vemos os gráficos correspondentes para o modelo 2. Nele fica mais visível um comportamento também presente em menor escala no modelo 1: três picos no histograma. As duas zonas separadas pelo pico central caracterizam as duas dinâmicas da entropia (e, por consequência, do estado): ou ela está flutuando entre valores altos quando o estado dos dois qubits é oposto oscilando com frequência alta, ou um decaimento lento a zero quando o estado do qubit monitorado estabiliza e o do não monitorado lentamente tende a se igualar a ele.

Na figura 7.15, vemos como as entropias se comportam para eficiências menores de

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

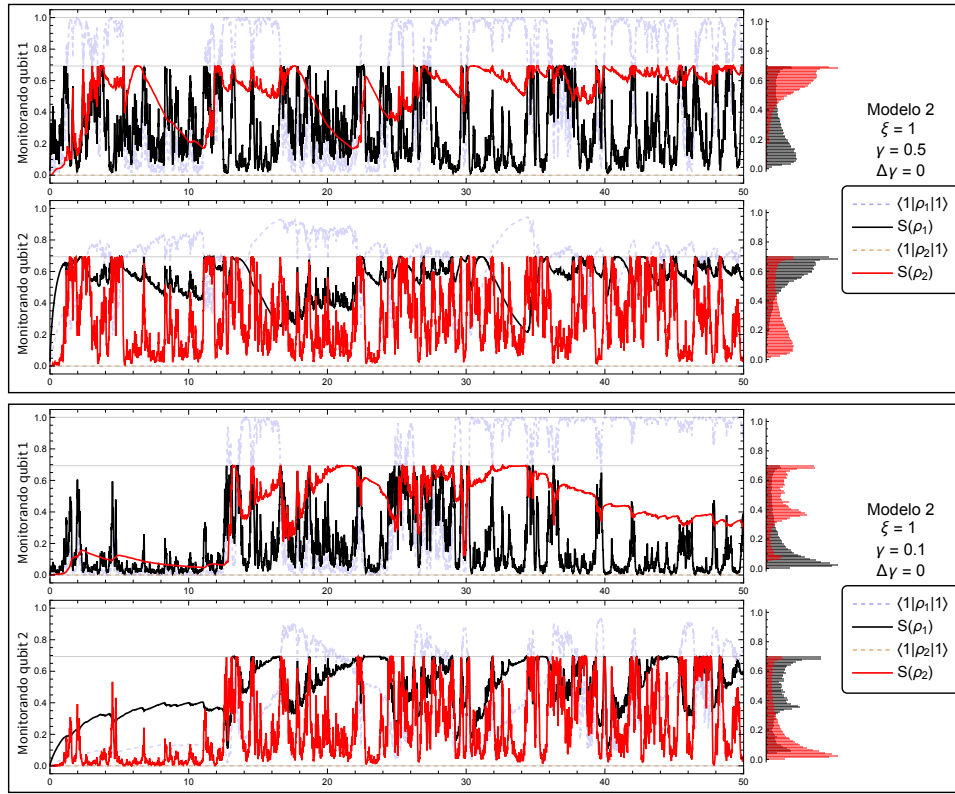
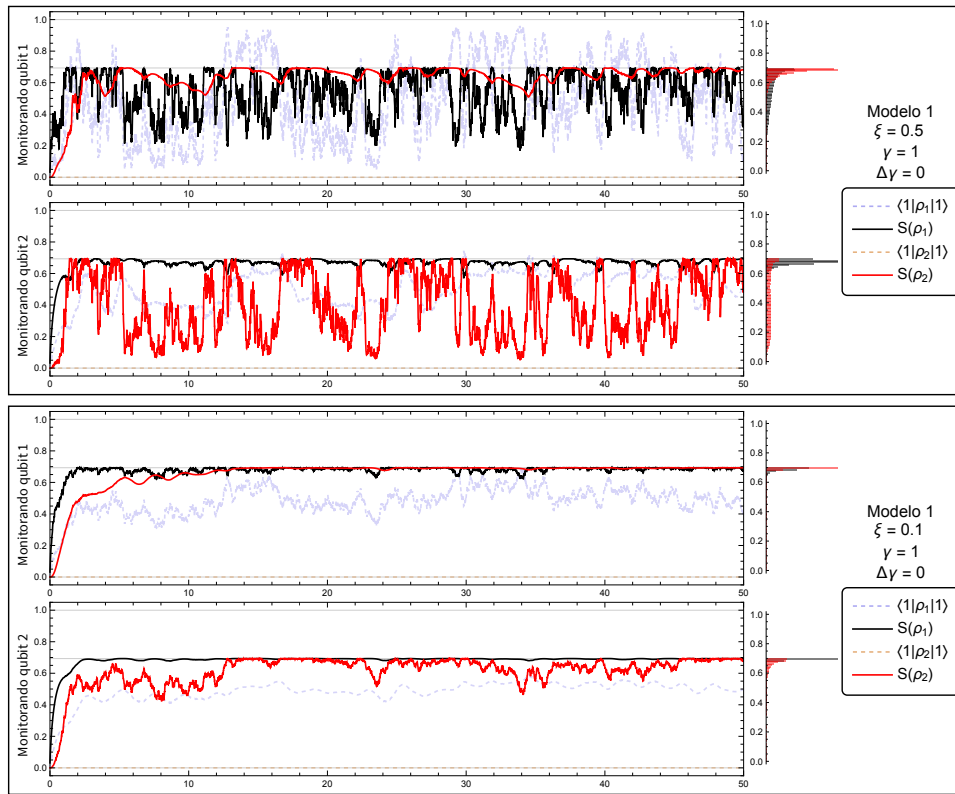


Figura 7.14: Trajetórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits  $S(\rho_j)$  sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes valores do acoplamento com os banhos  $\gamma \equiv \gamma_1 = \gamma_2$ .

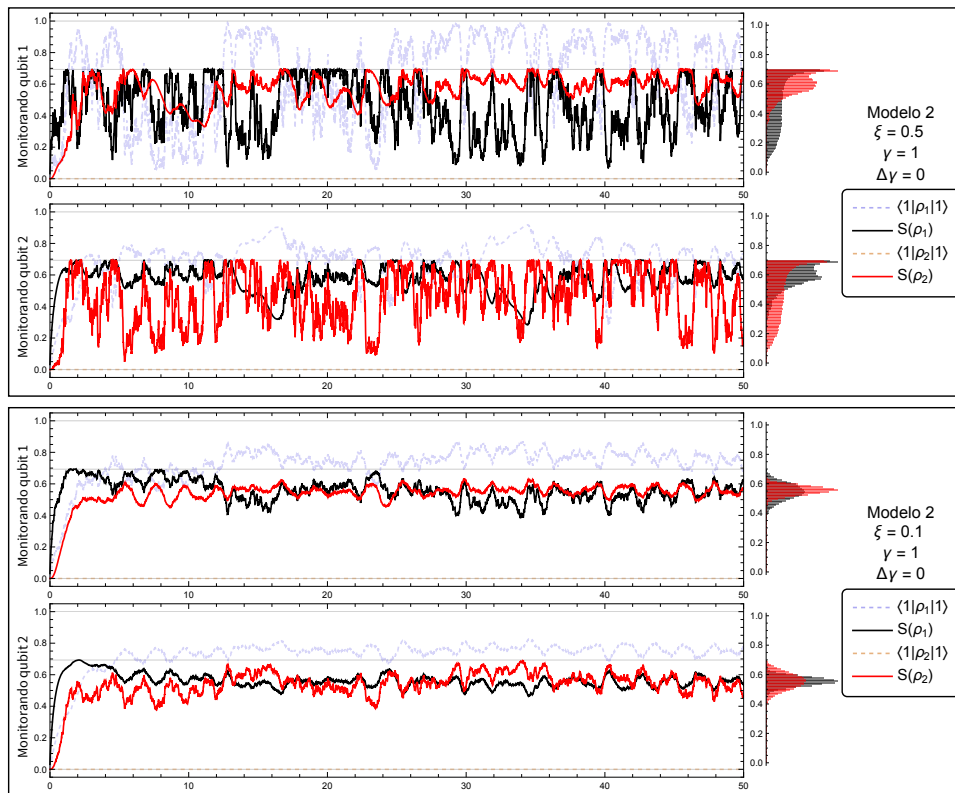
medição  $\xi$ . Pode-se verificar que, para ambos os modelos, a medida que  $\xi$  diminui, menos as entropias se aproximam do zero. Se recordarmos a definição de entropia como a incerteza sobre o estado de um sistema, se nossa medição não for 100% eficiente, nunca conseguimos atingir 100% de certeza (ou, analogamente, 0% de incerteza) sobre o estado do sistema sendo medido. Para  $\xi$  particularmente baixo,  $\xi = 0,01$ , qualquer forma do histograma que indicasse algo sobre a distribuição dos estados em que o sistema consegue estar se perde, e resta apenas uma distribuição normal advinda puramente do ruído Gaussiano.

Uma distinção significativa entre os dois modelos é que para o modelo 1 (figura 7.15a) a entropia de ambos os qubits tende ao valor máximo quando  $\xi \rightarrow 0$ . Em contraste, para o modelo 2 (figura 7.15b), as entropias tendem para um valor menor do que  $\log(2)$ , em torno de 0,55. Isso acontece pois, como já descrito no capítulo 5, no modelo 1, toda correlação entre os qubits se cancela no estado não condicionado, levando, quando a eficiência da medida vai a zero, à máxima incerteza sobre o estado dos qubits. No modelo 2, no entanto,

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits



(a) Modelo 1.



(b) Modelo 2.

Figura 7.15: Trajetórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits  $S(\rho_j)$  sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits em ambos os modelos (fig. 7.1) para diferentes valores da eficiência da medida  $\xi$ .

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

---

no mesmo limite ainda resta uma correlação entre os dois qubits, visto que as excitações ainda têm que fluir de um para o outro para atravessar o sistema. Deste modo, mesmo com uma medição totalmente ineficiente, ainda é possível supor algo sobre os estados dos qubits e, por consequência, suas entropias não são máximas.

Mostramos, a título de completude, nas figuras 7.16 e 7.17 o comportamento das entropias dos qubits para diferentes valores de  $\Delta\gamma$ . Não há mais muito que possa ser comentado sobre esses gráficos, afora que para  $|\Delta\gamma|$  grande, um estado específico do sistema se torna dominante ( $|00\rangle\langle 00|$  para  $\Delta\gamma \gtrsim -1$  e  $|11\rangle\langle 11|$  para  $\Delta\gamma \lesssim +1$ ) e, portanto, o resultado das medições se torna menos incerto, diminuindo a entropia para ambos os qubits. Ademais, a maior parte dos comentários feitos na seção anterior sobre os estados permanece verdade para as entropias dos qubits.

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

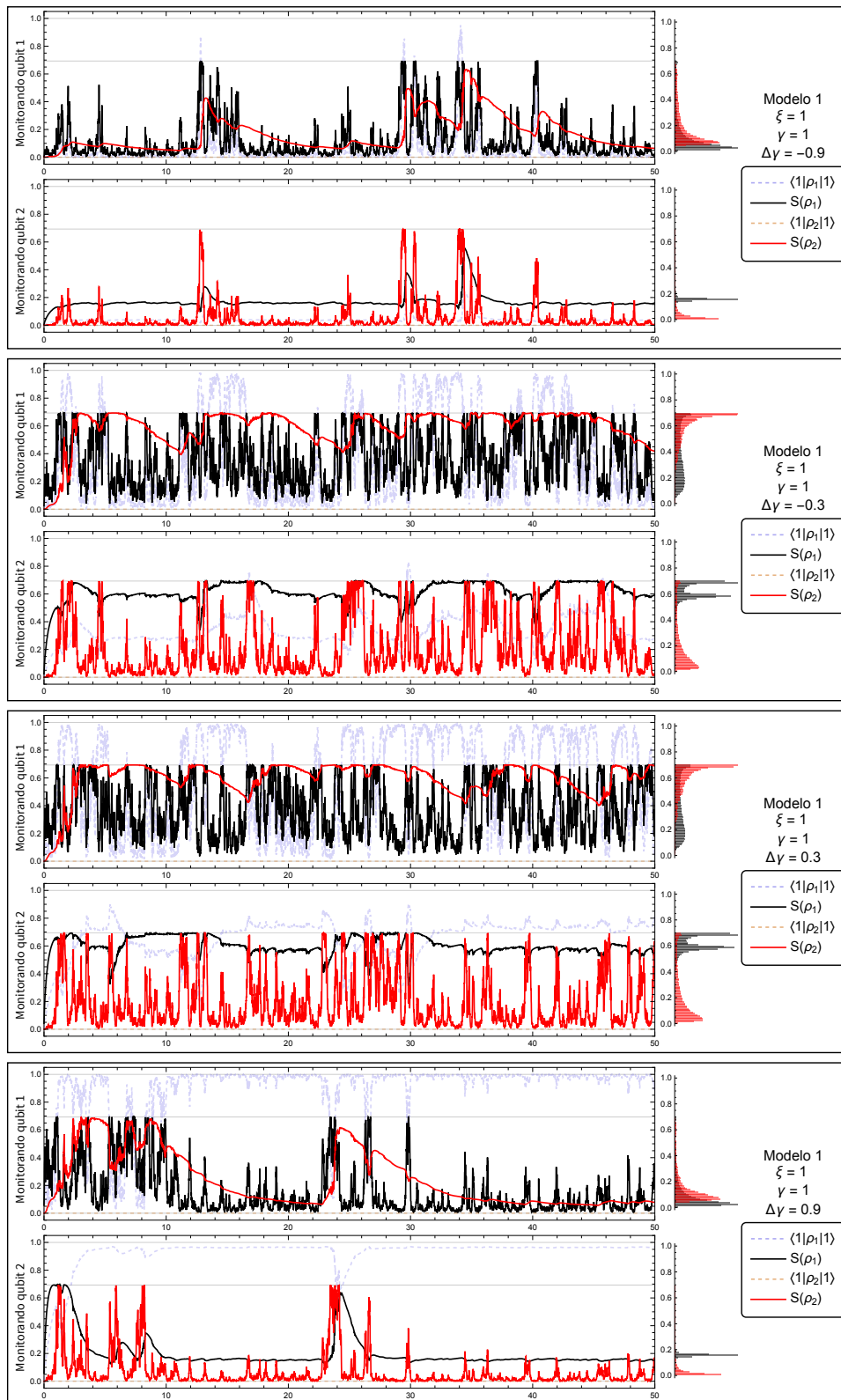


Figura 7.16: Trajetórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits  $S(\rho_j)$  sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 1 (fig. 7.1) para diferentes valores da diferença entre os acoplamentos com os banhos  $\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$ .



Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

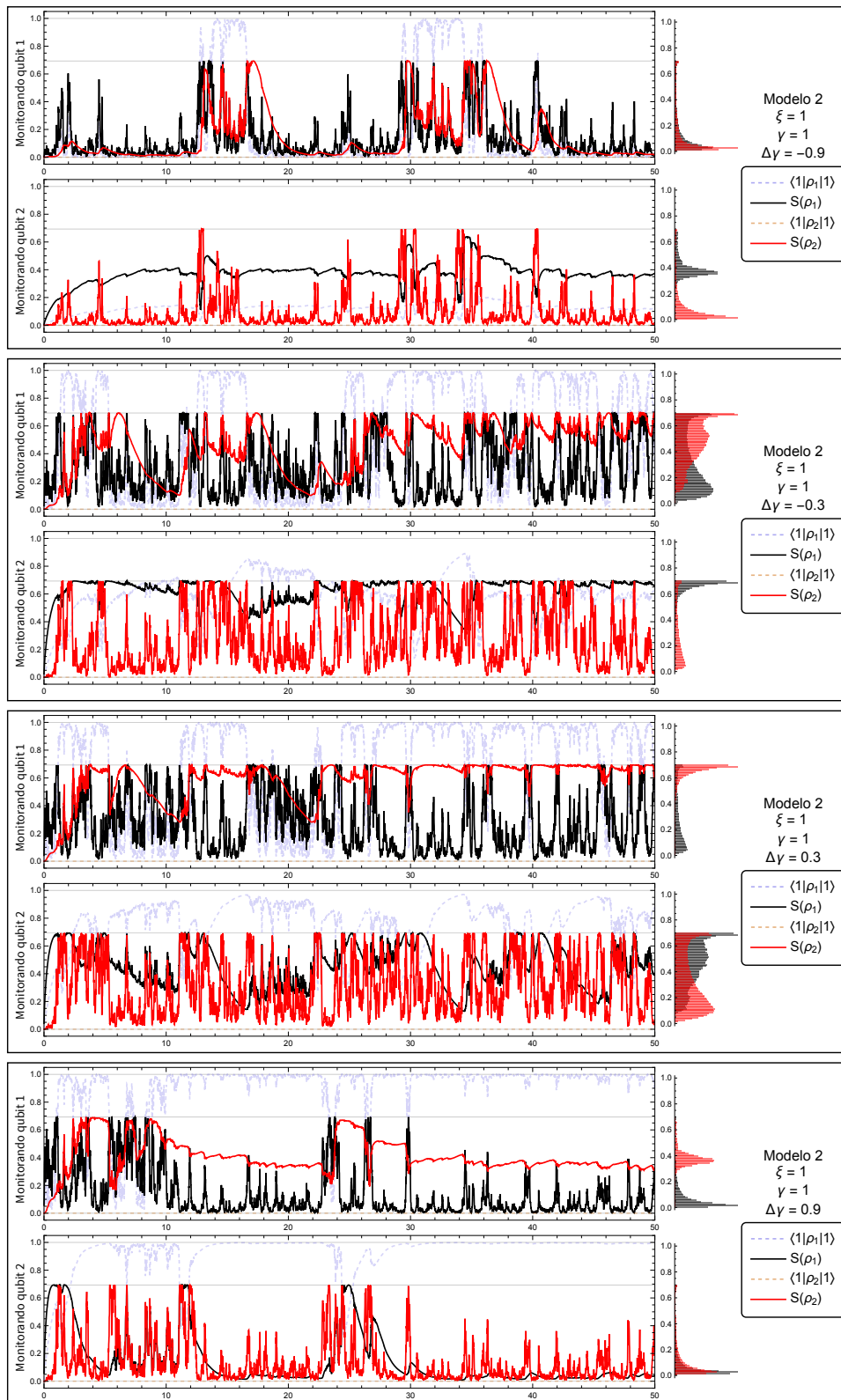


Figura 7.17: Trajetórias da entropia de von Neumann do estado reduzido dos qubits  $S(\rho_j)$  sobrepostas ao estado excitado desses mesmos qubits no modelo 2 (fig. 7.1) para diferentes valores da diferença entre os acoplamentos com os banhos  $\Delta\gamma \equiv \gamma_1 - \gamma_2$ .

### 7.3. Cálculo numérico das WTDs do sistema difusivo de dois qubits utilizando as simulações

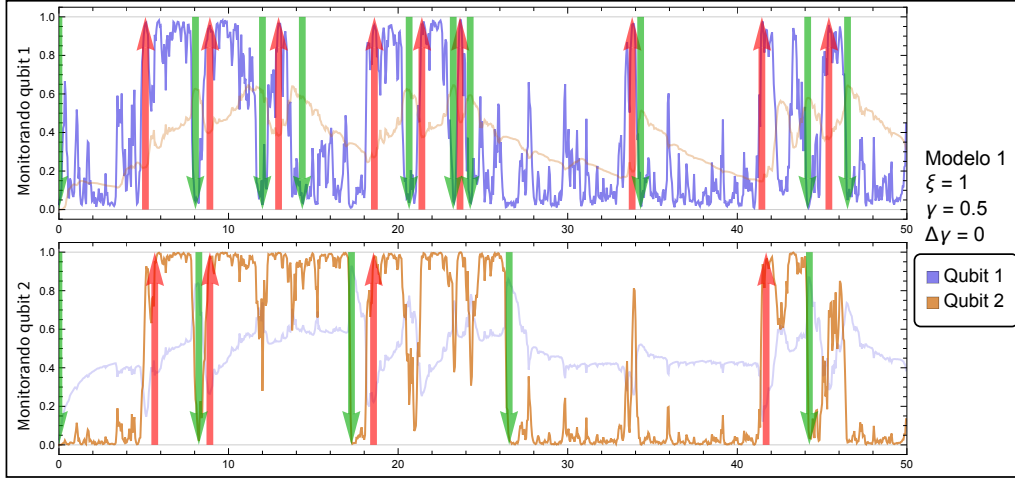


Figura 7.18: Identificação dos pulos nas trajetórias dos estados reduzidos dos qubits monitorados, sobreposto à evolução de suas trajetórias no modelo 1 (fig. 7.1) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$ .

A contrário do protocolo de detecção direta do capítulo 5, não é tão evidente no protocolo atual o que caracteriza um pulo do sistema e o que não. Primeiramente, como notado na seção anterior, apenas o estado reduzido do qubit monitorado (e quando a eficiência da medida  $\xi$  é alta, próxima a 1) de fato se comporta de uma maneira que pode ser identificada como realizando “pulos”, oscilando entre um estado próximo a  $|0\rangle\langle 0|$  a outro próximo a  $|1\rangle\langle 1|$ . Isso já nos impede de calcular uma solução analítica para a WTD utilizando o procedimento descrito na seção 4.3, visto que aquele método apenas pode calcular a distribuição de tempos de espera entre canais *monitorados* [20], e o que queremos fazer aqui é *estimar* através das variações no canal monitorado  $\hat{M}$ , a distribuição dos pulos nos canais *não* monitorados  $\hat{L}_1$  e  $\hat{L}_2$ . As distribuições, portanto, serão calculadas apenas numericamente, por meio das simulações.

Seja o estado reduzido do qubit  $j = 1, 2$  dado pela matriz densidade

$$\rho_j(t_n) = p_0(t_n) |00\rangle\langle 00| + p_1(t_n) |11\rangle\langle 11|. \quad (7.13)$$

$\rho_j$  não possui nenhum elemento fora da diagonal principal porque não há correlação entre

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

o estado excitado e o fundamental dos qubits (isso pode ser verificado tirando os traços parciais da matriz densidade do sistema  $\rho$  em qualquer instante da simulação). Digamos que no instante inicial,  $p_0(t_0) = 1$ . Deste momento em diante, o sistema vai flutuar estocasticamente, mas definimos como um *jump-up* apenas o instante  $t_n$  quando é cruzado  $p_1(t_n) \geq 0,95$ . O próximo *jump-down*, por sua vez, será registrado apenas quando  $p_0(t_{n+m}) \geq 0,95$ , e assim sucessivamente. O intervalo entre pulos ( $t_{n+m} - t_n$ , no exemplo acima), então, foi calculado para cada par de pulos, e sua distribuição foi plotada nos gráficos a seguir. Apenas simulações com eficiência de medição máxima  $\xi = 1$  foram empregadas.

Na figura 7.18, vemos uma sobreposição desses pulos com a trajetória dos correspondentes qubits monitorados no modelo 1 para acoplamento com os banhos  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . É possível ver que essa escolha de um corte em 0,95 é eficaz em desconsiderar as múltiplas flutuações estocásticas.

A figura 7.19 apresenta o resultado do histograma normalizado do intervalo entre pulos para essa simulação. Assim como notado na comparação entre as evoluções não condicionadas para diferentes eficiências de medição  $\xi$  (figuras 7.11 e 7.10), a presença do QPC elimina as oscilações senoidais que havíamos visto anteriormente, nas WTDs da

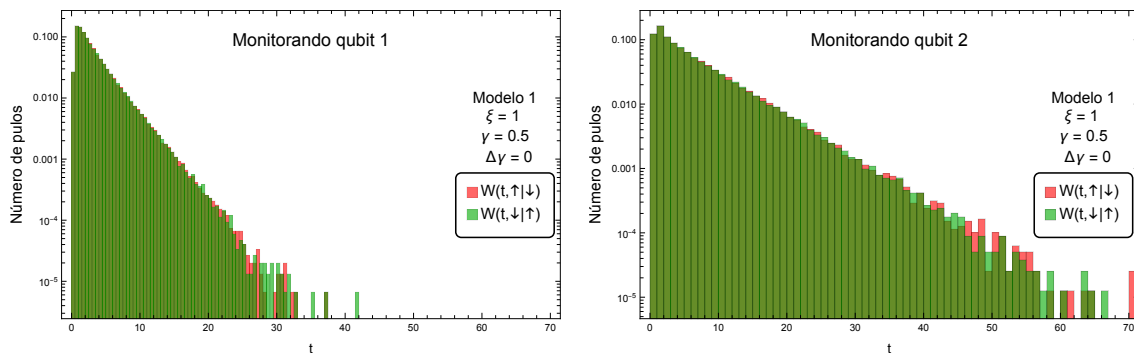


Figura 7.19: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Todos os gráficos dessa seção foram normalizados, e obtidos para uma eficiência de medição  $\xi = 1$ . Foram empregadas 100 simulações com sementes distintas, cada uma de duração de 10 mil unidades de tempo, para se extrair esses intervalos entre pulos. Foram identificados no total de 150 418 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 79 287 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 41 e 70 unidades de tempo, respectivamente.

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

seção 5.3.2. O que resta é apenas uma subida rápida a um valor máximo (ver recorte na figura 7.20), de duração de menos de uma unidade de tempo, seguida de um decaimento exponencial (em função disso, preferimos plotar os histogramas em escala logarítmica). Algumas distinções devem ser feitas antes de tentarmos comparar os gráficos presentes nessa seção com os do capítulo 5: primeiro, aqui estamos plotando apenas os pulos da trajetória de *um único* qubit, com dois níveis de energia, e não do sistema como um todo, que tem três. Portanto, temos apenas duas distribuições, pois um *jump-up* pode apenas ser seguido por um *jump-down* e vice-versa.

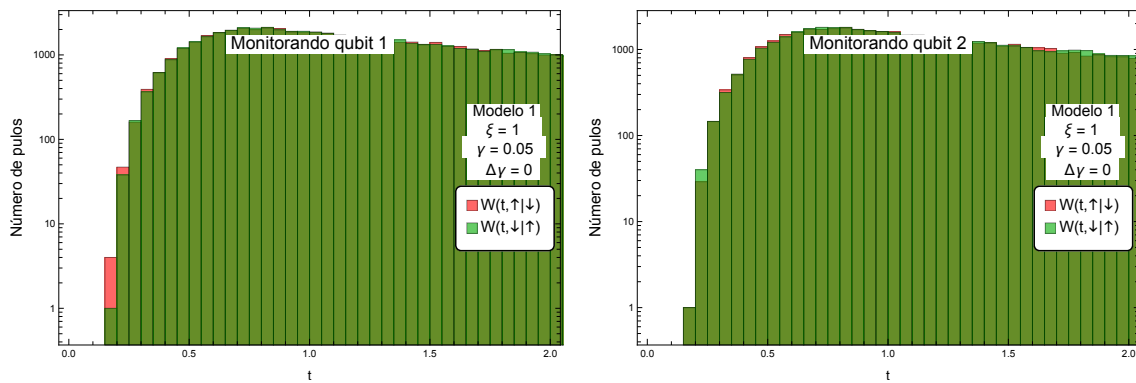


Figura 7.20: Recorte das primeiras duas unidades de tempo dos histogramas da WTD da figura 7.19, para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica.

Na figura 7.19, a distribuição dos dois pulos é igual. Uma característica que podemos notar aqui, e que estará presente também em alguns dos próximos histogramas, é que os intervalos de espera do qubit 2 (o isolado dos banhos) quando monitorado são, em média, aproximadamente o dobro dos do qubit 1 (o em contato com os banhos) quando ele que está sendo monitorado. Isso, naturalmente, é consequência da interação com o ambiente: enquanto para o qubit 2, as excitações dos pulos podem apenas vir do/ir para o qubit 1, no qubit 1 podem vir do/ir para o qubit 1 e dos/para os banhos. Se diminuirmos o acoplamento com os banhos, tal qual nos histogramas da figura 7.21, onde  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$ , as duas distribuições para ambos os monitoramentos se aproximam uma da outra.

Analisando as figuras 7.21 e 7.22, notamos que agora temos dois regimes de decaimento distinto, um para tempos de espera  $t < 15$  e outro para  $t > 20$ , aproximadamente. Este comportamento claramente corresponde ao que encontraríamos para a soma de dois

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

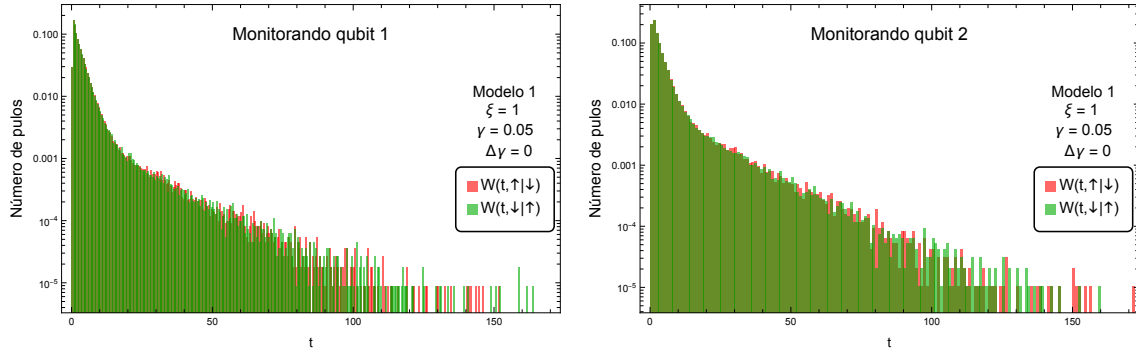


Figura 7.21: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 111 786 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 95 893 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 183 e 172 unidades de tempo, respectivamente.

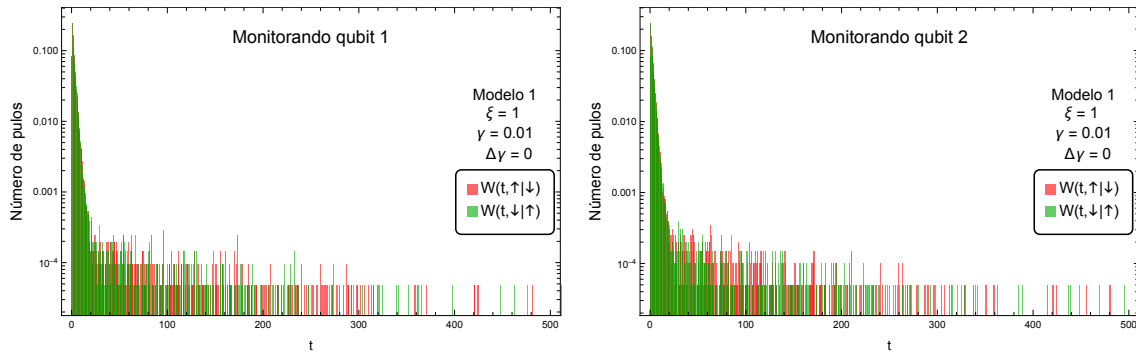
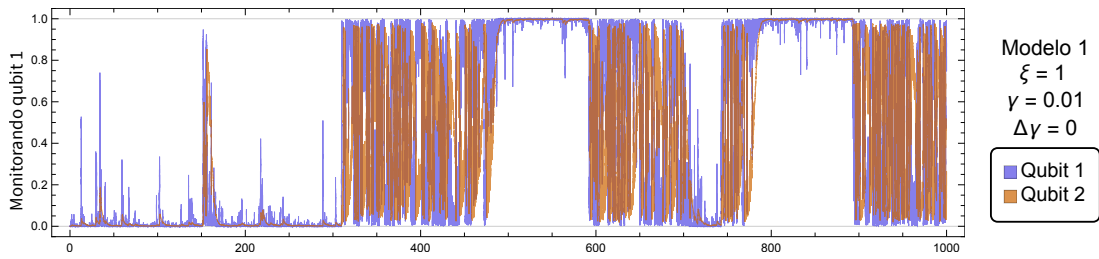


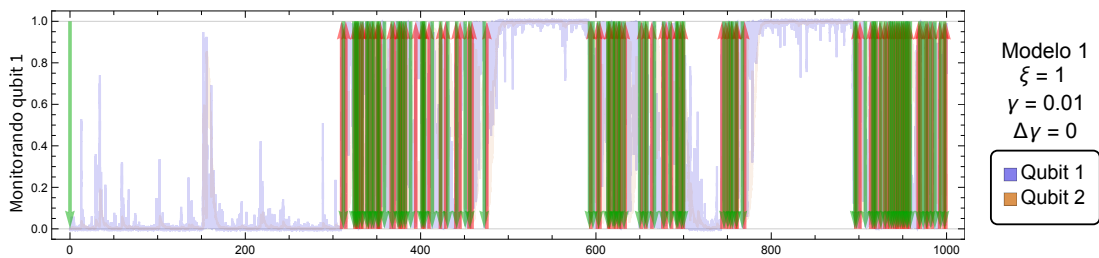
Figura 7.22: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,01$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Devido às limitações de memória RAM, as 100 simulações foram mais curtas, de duração de 2 000 unidades de tempo, sendo identificados no total de 20 669 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 19 959 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 608 e 603 unidades de tempo, respectivamente.

decaimentos exponenciais  $W(t) = e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}$ , para ambas as taxas de decaimento  $\alpha$  e  $\beta$  positivas. Como a interação com o aparato de medição domina, vemos a *back-action* do QPC “prendendo” o sistema em um mesmo estado por mais tempo, no efeito de Zeno quântico já descrito. No caso mais extremo, de  $\gamma = 0,01$ , podemos inclusive identificar tempos de espera que chegam a ser  $15\times$  mais longos do que os para  $\gamma = 0,5$  (figura 7.19). No entanto, a medida que diminuimos o acoplamento com os banhos, identificamos *duas* distribuições, e não apenas uma mais longa porque mantivemos a Hamiltoniana fixa. Re-

Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits



(a) Trajetórias para o monitoramento do qubit 1 no modelo 1.



(b) Pulsos identificados para a trajetória da figura 7.23a. As setas verdes correspondem aos *jump-downs* e a vermelhas aos *jump-ups*.

Figura 7.23: Trajetória de duração de 1000 unidades de tempo dos estados reduzidos dos qubits para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,001$  e  $\xi = 1$  no modelo 1. Por simplicidade, plotamos apenas um dos monitoramentos.

lembrando a discussão feita sobre ela nos capítulos 4 e 5 (em particular, na seção 5.1), a Hamiltoniana só modifica o estado do sistema quando ele se encontra com apenas uma excitação. As trocas *entre* os qubits são dadas pela coerência  $\alpha$ , fixada em  $\alpha = 0,5$ . Este é o motivo para não identificarmos dois comportamentos para  $\gamma = 0,5$  da figura 7.19: naquele caso em particular, a distribuição de pulsos provocados pela interação com os banhos e pela troca entre os qubits era igual. É exatamente isso o que vemos na figura 7.23, onde plotamos um intervalo mais longo da simulação. Na figura 7.23b, podemos distinguir claramente dois regimes: longos intervalos sem pulsos seguidos de uma sequência rápida de pulsos. O primeiro regime (intervalos longos) sempre ocorre quando nenhum ou ambos os qubits se encontram excitados, e o sistema permanece “preso” pois a única maneira de mudar seria por meio da entrada ou saída de excitações, e essas apenas podem vir do fraco acoplamento com os banhos. O segundo regime (sequência rápida de pulsos), no entanto, ocorre quando temos apenas uma excitação que flutua de um qubit para o outro por meio da Hamiltoniana. Na figura 7.4, da seção anterior, onde apenas um corte de duração de 50 unidades de tempo de uma trajetória análoga foi analisada, podemos distinguir mais

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

claramente que durante o período de pulos rápidos, os estados reduzidos dos dois qubits tendem a permanecer opostos, indicando que de fato uma única excitação está saltando de um para o outro. São esses os dois comportamentos que vemos nos gráficos das figuras 7.21 e 7.22. Eles se parecem com a soma de dois decaimentos exponenciais pois são exatamente isso, visto que o QPC é incapaz de diferenciar se o pulo no qubit monitorado veio de uma interação com os banhos (decaimento lento) ou da troca com o outro qubit (decaimento rápido). Esta é claramente uma limitação do método, quando comparada à detecção direta do capítulo 5, mas desde que a coerência  $\alpha$  e os acoplamentos com os banhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam distantes o bastante, é possível isolar um comportamento do outro.

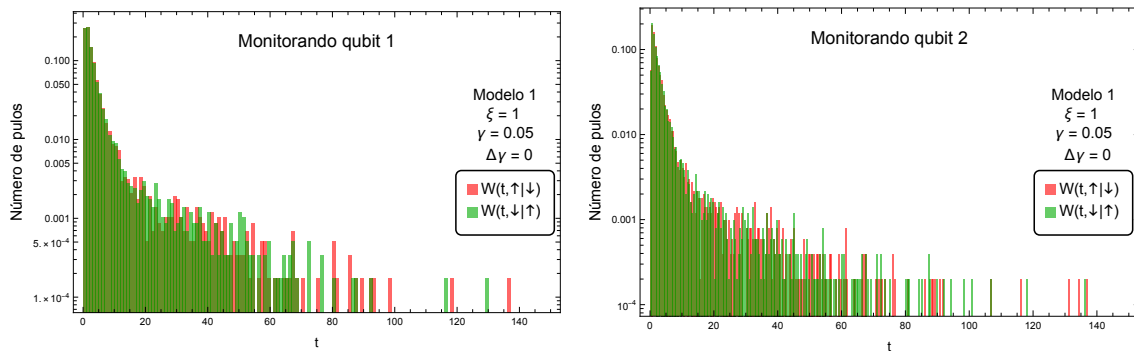


Figura 7.24: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para intervalo entre medições  $dt = 0,001$ , mantendo os demais parâmetros iguais ao da WTD da figura 7.21:  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. As 100 simulações foram mais curtas, de duração de 500 unidades de tempo. Foram identificados no total de 5 784 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 5 037 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 136 e 137 unidades de tempo, respectivamente.

Como um teste de sanidade, podemos variar o intervalo de tempo entre medições  $dt$  e ver se isso interfere nas distribuições de tempos de espera. É isso o que foi feito na figura 7.24, onde foi reproduzida a WTD da figura 7.19 para  $dt = 0,001$ , em vez de  $dt = 0,01$  como nas demais simulações. Podemos notar que apesar do número muito menor de pontos (500 unidades de tempo, em vez de 10 mil, devido a limitações de memória RAM), é suficiente para podemos ver que o formato das distribuições permanece o mesmo, com dois regimes de decaimento para  $t > 20$  ou  $t < 15$ , provando que a nossa escolha inicial de intervalo  $dt = 0,01$  é curta o suficiente para não influenciar significativamente nas simulações.

## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

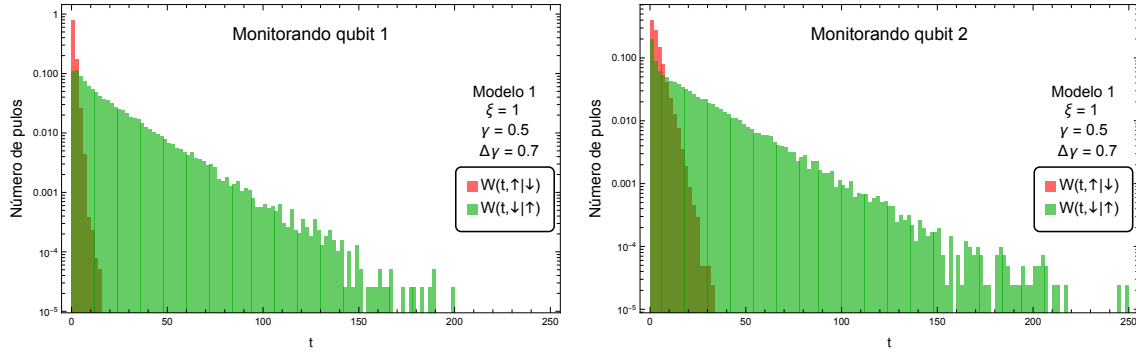


Figura 7.25: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  e  $\Delta\gamma = 0,7$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 1 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 39 007 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 41 828 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 198 e 281 unidades de tempo, respectivamente.

Na figura 7.25, vemos a WTD para valores diferentes entre os acoplamentos:  $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 0,7$ . Assim como esperado, com a “taxa de entrada” de excitação  $\gamma_1$  maior que a “de saída”  $\gamma_2$ , os tempos de espera para um *jump-up* acontecer são no geral mais curtos do que o para um *jump-down* acontecer.

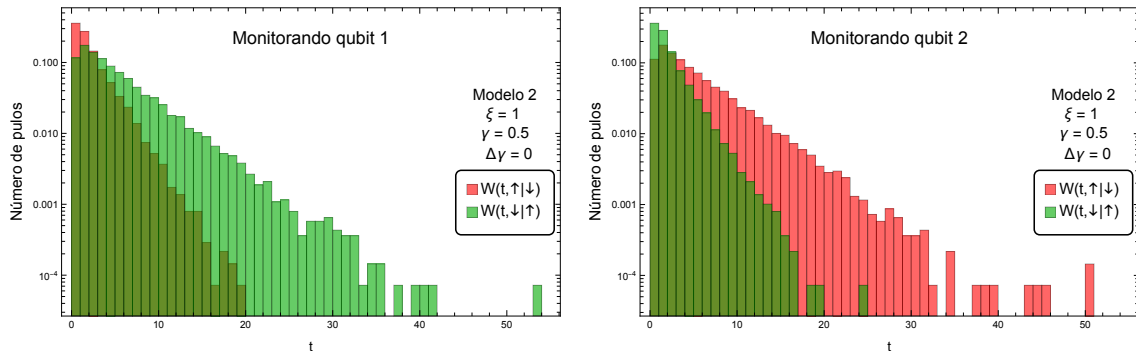


Figura 7.26: Histogramas da distribuição de tempos de espera (WTD) para  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,5$  para ambos os monitoramentos do sistema no modelo 2 (fig. 7.1) e plotados em escala logarítmica. Para o mesmo número de simulações dos histogramas da figura 7.19, foram identificados no total de 13 876 pulos para o monitoramento do qubit 1 e 13 858 para o qubit 2. Seus intervalos mais longos entre pulos foram de 53 e 50 unidades de tempo, respectivamente.

Por fim, plotamos os resultados dos histogramas para o modelo 2, na figura 7.26. Diferentemente da WTD sob protocolo de detecção direta (figura 5.22), vemos na figura 7.26 que no modelo 2, mesmo para  $\Delta\gamma = 0$ , as distribuições dos dois pulos não são iguais.



## Capítulo 7. Resultado das simulações de difusão quântica para um sistema de dois qubits

---

A explicação pode ser encontrada nos histogramas da trajetória para  $\gamma = 0,5$ , na figura 7.5c: ao contrário dos do modelo 1 (fig. 7.3c), no modelo 2 eles não são simétricos, e sim têm um viés para a interação com o banho: monitorando o qubit 1, o seu respectivo histograma tem uma viés para o 1, e portanto os *jump-ups* (vermelhos nos gráficos) acontecem mais rápido, enquanto que para o monitoramento do qubit 2, o seu respectivo histograma tem um viés para o 0, e portanto os *jump-downs* acontecem mais rápido.

# 8

## Conclusão

Ao longo do presente trabalho, foram apresentados os resultados das simulações das trajetórias sob dois protocolos de monitoramento de um sistema aberto. O sistema, composto por dois qubits que interagem por meio de **uma Hamiltoniana que preservava a quantidade de excitações**, poderia se encontrar em três níveis distintos de energia. Ele estava conectado a dois banhos externos: o banho 1, que apenas emitia pacote de energia, e o banho 2, que apenas os absorvia, com parâmetros de acoplamento  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente.

Dois modelos de acoplamento sistema-banhos foram estudados: no **modelo 1**, ambos os banhos interagem com um único qubit, mantendo o outro isolado; no **modelo 2**, cada banho se acoplava a um dos qubits, fazendo com que a energia fluísse através do sistema.

Sob o primeiro protocolo de medição, a **detecção direta de saltos quânticos** (capítulo 5), a maior parte das medições retornava um resultado-nulo, indicando que não houve troca de energia entre o sistema e o ambiente, mas, com frequência baixa, a medição identificava (com 100% de acurácia) que uma interação havia ocorrido e o qubit correspondente era imediatamente colapsado ao autoestado do operador de medição. Assim, as trajetórias, quando plotadas na base dos autoestados da energia, eram compostas por longos trechos contínuos, constantes ou de oscilações senoidais (amortecidas ou não), interrompidos em alguns pontos por saltos descontínuos.

Analisando os gráficos das trajetórias, pudemos identificar que a magnitude dos parâmetros de acoplamento com os banhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  estão correlacionadas com a frequência dos pulos (figura 5.3), e que a diferença entre os dois influencia na ocupação esperada dos qubits (figura 5.6). Uma propriedade interessante que foi observada comparando os

dois modelos (representados na figura 5.2) é que, quando temos apenas uma excitação no sistema, o modelo 1 é degenerado, enquanto o modelo 2 não. Em particular, para  $\gamma_1 = \gamma_2$ , esse estado degenerado é estável. Isso porque no modelo 2 há um “fluxo” de energia de um qubit para o outro (visível pela coerência não nula no estado não condicionado, figura 5.10b), enquanto que, para o modelo 1, o qubit isolado dos banhos pode guardar nele uma “memória” mais longa dos pulos anteriores, tornado a evolução do sistema um processo não renovável, o que é discutido a fundo na seção 5.3. Essa degenerescência é visível até na evolução da entropia de von Neumann dos qubits, que pode oscilar de duas maneiras distintas no modelo 1 (figura 5.14a), mas de apenas uma no modelo 2 (figura 5.14b). A degenerescência também impede de se poder comparar as seis distribuições de tempo de espera (WTD) com os seus respectivos resultados esperados (figura 5.21), precisando ser marginalizadas para que isso pudesse ser feito. Inclusive, em ambos os modelos, com a comparação dos valores esperados (calculados analiticamente por meio da equação de Lindblad) e simulados das WTD (figuras 5.21 e 5.22), é possível concluir que as simulações convergem para as distribuições esperadas.

Em contraste, sob o segundo protocolo, o de **medida difusiva** (capítulo 7), toda medida retornava (de forma ruidosa) a ocupação do qubit acoplado ao QPC. Isso fazia com que, quando a magnitude da eficiência de medição  $\xi$  era grande em relação aos demais parâmetros, o qubit monitorado sofresse do efeito de Zeno quântico, e tendesse a permanecer colapsado no estado (reduzido) fundamental ou excitado, pulando de um para o outro (figura 7.3c); contudo, se  $\xi$  fosse pequeno, o estado rapidamente evoluía para um estado próximo do maximamente misto (figuras 7.8 e 7.9), e rapidamente se tornava impossível distinguir os dois estados no histograma da marginalização no tempo.

O qubit não monitorado, enquanto isso, possuía uma dinâmica mais complexa: em um primeiro momento, principalmente para  $\gamma_s$  pequenos, quando o qubit monitorado fazia um pulo, o não monitorado realizava o pulo oposto; mas, caso o qubit monitorado permanecesse “preso” pelo efeito de Zeno quântico, o não monitorado tendia a decair lentamente para o mesmo estado (uma análise aprofundada desse comportamento é feita nas seções 7.2.1 e 7.3). Esse comportamento mais lento é altamente condicionado pela diferença entre os acoplamentos com os banhos (figuras 7.6 e 7.7).

Para acoplamentos muito fracos com os banhos, a evolução, para ambos os moni-

toramentos e em ambos os modelos, tendem a se igualar a medida que a Hamiltoniana interna e *back-action* do QPC dominam a evolução (figuras 7.4 e 7.5). Uma consequência particularmente interessante disso pode ser vista nas WTDs (figuras 7.21 e 7.22), onde a sobreposição de duas taxas de decaimento é claramente visível: uma mais rápida para os pulos provocados pela Hamiltoniana interna quando há apenas uma excitação no sistema, e uma mais lenta provocada pelo ganho e perda de energia para os banhos.

Como mencionado na introdução (capítulo 1), nas últimas décadas houve muito progresso no estudo de sistemas quânticos individuais [11]. Modelos como os apresentados neste trabalho podem ser construídos tanto utilizando cavidades óticas [8, 47], quanto com gás de elétrons em um cristal [42]. A aplicação mais famosa, atualmente, para sistemas quânticos individuais é a em computadores quânticos, mas, como já mencionado, a comunicação e a construção de sensores também são áreas com muito potencial.

Existem várias direções em que se pode avançar o trabalho aqui realizado. Em primeiro lugar, pode-se acrescentar mais qubits ao sistema. Na referência [38], por exemplo, em um set-up semelhante ao modelo 2, a anisotropia no fluxo de calor apenas se manifesta para três ou mais qubits. Nada impede que também seja possível encontrar comportamentos mais complexos para sistemas de mais qubits no modelo 1. Outra possibilidade é incorporar feedback às simulações, de modo a estabilizar o estado do sistema [17, 48] — método utilizado na criação de baterias quânticas, por exemplo [49]. Também é possível adotar outras bases para as medições, mudando o unravelling do sistema [50], o que tem uma influência fundamental no comportamento das trajetórias (relembrar da nota de rodapé 5 do capítulo 2). Por fim, também é uma possibilidade incorporar interações não-Markovianas com os banhos, incluindo interações ancila-ancila [33, 34], por exemplo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Agradeço ao prof. Francesco Ciccarello, da Universidade de Palermo, Itália, pela sugestão das últimas duas propostas.

## Bibliografia

- [1] M.E. Peskin e D.V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1995. ISBN: 978-0-8133-4543-7.
- [2] Jenann Ismael. «Quantum Mechanics». Em: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por Edward N. Zalta. Fall 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/qm/> (acedido em 16/01/2024).
- [3] J. von Neumann, R.T. Beyer e N.A. Wheeler. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 2018. ISBN: 978-1-4008-8992-1.
- [4] J. S. Bell. «On the Einstein Podolsky Rosen paradox». Em: *Physics Physique Fizika* 1.3 (nov. de 1964). Publisher: American Physical Society, pp. 195–200. DOI: [10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195](https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195> (acedido em 19/04/2023).
- [5] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?» Em: *Physical Review* 47.10 (mai. de 1935). Publisher: American Physical Society, pp. 777–780. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777> (acedido em 16/01/2024).
- [6] N. Bohr. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?» Em: *Physical Review* 48.8 (out. de 1935). Publisher: American Physical Society, pp. 696–702. DOI: [10.1103/PhysRev.48.696](https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.696). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.696> (acedido em 16/01/2024).
- [7] Hugh Everett. «Theory of the Universal Wavefunction». Tese de doutoramento. 1956.

- [8] H. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991 v. 18. Springer Berlin Heidelberg, 1993. ISBN: 978-3-540-56634-2.
- [9] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. en. Cambridge University Press, dez. de 2010. ISBN: 978-1-139-49548-6.
- [10] Jonathan P. Dowling e Gerard J. Milburn. «Quantum technology: the second quantum revolution». en. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 361.1809 (ago. de 2003). Ed. por A. G. J. MacFarlane, pp. 1655–1674. ISSN: 1364-503X, 1471-2962. DOI: [10.1098/rsta.2003.1227](https://doi.org/10.1098/rsta.2003.1227). URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2003.1227> (acedido em 14/08/2023).
- [11] Ivan H. Deutsch. «Harnessing the Power of the Second Quantum Revolution». Em: *PRX Quantum* 1.2 (nov. de 2020). Publisher: American Physical Society, p. 020101. DOI: [10.1103/PRXQuantum.1.020101](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.1.020101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.1.020101> (acedido em 15/01/2024).
- [12] Rajeev Acharya et al. «Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit». en. Em: *Nature* 614.7949 (fev. de 2023). Number: 7949 Publisher: Nature Publishing Group, pp. 676–681. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/s41586-022-05434-1](https://doi.org/10.1038/s41586-022-05434-1). URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-022-05434-1> (acedido em 15/08/2023).
- [13] Youngseok Kim et al. «Evidence for the utility of quantum computing before fault tolerance». en. Em: *Nature* 618.7965 (jun. de 2023). Number: 7965 Publisher: Nature Publishing Group, pp. 500–505. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/s41586-023-06096-3](https://doi.org/10.1038/s41586-023-06096-3). URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-023-06096-3> (acedido em 15/08/2023).
- [14] Sheng-Kai Liao et al. «Satellite-to-ground quantum key distribution». en. Em: *Nature* 549.7670 (set. de 2017). Number: 7670 Publisher: Nature Publishing Group, pp. 43–47. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature23655](https://doi.org/10.1038/nature23655). URL: <https://www.nature.com/articles/nature23655> (acedido em 02/02/2024).
- [15] Leonard Susskind. *Computational Complexity and Black Hole Horizons*. arXiv:1402.5674 [gr-qc, physics:hep-th, physics:quant-ph]. Fev. de 2014. DOI: [10.48550/arXiv.1402.5674](https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.5674). URL: <http://arxiv.org/abs/1402.5674> (acedido em 16/01/2024).
- [16] Bei Lok Hu e Enric Verdaguer. «Stochastic Gravity: Theory and Applications». eng. Em: *Living Reviews in Relativity* 7.1 (2004), p. 3. ISSN: 1433-8351. DOI: [10.12942/lrr-2004-3](https://doi.org/10.12942/lrr-2004-3).
- [17] Howard M Wiseman e Gerard J Milburn. *Quantum Measurement and Control*. en. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [18] K. Jacobs. *Quantum Measurement Theory and its Applications*. Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-139-99219-0.

- [19] Heinz-Peter Breuer e Francesco Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. en. Oxford University Press, 2002. ISBN: 978-0-19-852063-4.
- [20] Gabriel T. Landi et al. *Current fluctuations in open quantum systems: Bridging the gap between quantum continuous measurements and full counting statistics*. arXiv:2303.04270 [cond-mat, physics:quant-ph]. Abr. de 2023. DOI: [10.48550/arXiv.2303.04270](https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.04270). URL: <http://arxiv.org/abs/2303.04270> (acedido em 11/07/2023).
- [21] Hsi-Sheng Goan et al. «Continuous quantum measurement of two coupled quantum dots using a point contact: A quantum trajectory approach». Em: *Physical Review B* 63.12 (mar. de 2001). arXiv:cond-mat/0006333, p. 125326. ISSN: 0163-1829, 1095-3795. DOI: [10.1103/PhysRevB.63.125326](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.125326). URL: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0006333> (acedido em 03/02/2023).
- [22] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. en. New York, NY: Springer US, 1994. ISBN: 978-1-4757-0578-2 978-1-4757-0576-8. DOI: [10.1007/978-1-4757-0576-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-0576-8). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-0576-8> (acedido em 18/04/2023).
- [23] Alain Aspect, John F Clauser e Anton Zeilinger. *The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize in Physics 2022 jointly to Alain Aspect, John F. Clauser and Anton Zeilinger “for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science”*. en. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/>.
- [24] John F. Clauser et al. «Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories». Em: *Physical Review Letters* 23.15 (out. de 1969). Publisher: American Physical Society, pp. 880–884. DOI: [10.1103/PhysRevLett.23.880](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880> (acedido em 18/03/2024).
- [25] G. Lindblad. «On the generators of quantum dynamical semigroups». en. Em: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (jun. de 1976), pp. 119–130. ISSN: 1432-0916. DOI: [10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499). URL: <https://doi.org/10.1007/BF01608499> (acedido em 30/05/2023).
- [26] K Kraus. «General state changes in quantum theory». en. Em: *Annals of Physics* 64.2 (jun. de 1971), pp. 311–335. ISSN: 0003-4916. DOI: [10.1016/0003-4916\(71\)90108-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(71)90108-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491671901084> (acedido em 15/06/2023).
- [27] Gabriel T Landi. *Quantum Information and Quantum Noise*. en. São Paulo, 2019. URL: [http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/courses/lecture-notes\\_v2-18.pdf](http://www.fmt.if.usp.br/~gtlandi/courses/lecture-notes_v2-18.pdf) (acedido em 04/08/2022).
- [28] Kurt Jacobs. *Stochastic Processes for Physicists: Understanding Noisy Systems*. en. Cambridge University Press, fev. de 2010. ISBN: 978-1-139-48679-8.
- [29] Robert Alicki e K. Lendi. *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*. en. Springer Science & Business Media, abr. de 2007. ISBN: 978-3-540-70860-5.

- [30] Gabriel T. Landi, Dario Poletti e Gernot Schaller. «Non-equilibrium boundary driven quantum systems: models, methods and properties». Em: *Reviews of Modern Physics* 94.4 (dez. de 2022). arXiv:2104.14350 [cond-mat, physics:quant-ph], p. 045006. ISSN: 0034-6861, 1539-0756. DOI: [10.1103/RevModPhys.94.045006](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.94.045006). URL: <http://arxiv.org/abs/2104.14350> (acedido em 21/06/2023).
- [31] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski e E. C. G. Sudarshan. «Completely positive dynamical semigroups of  $N$ -level systems». en. Em: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (mai. de 1976), pp. 821–825. ISSN: 0022-2488, 1089-7658. DOI: [10.1063/1.522979](https://doi.org/10.1063/1.522979). (Acedido em 09/09/2023).
- [32] Francesco Ciccarello et al. «Quantum collision models: open system dynamics from repeated interactions». Em: *Physics Reports* 954 (abr. de 2022). arXiv:2106.11974 [quant-ph], pp. 1–70. ISSN: 03701573. DOI: [10.1016/j.physrep.2022.01.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.01.001). URL: <http://arxiv.org/abs/2106.11974> (acedido em 04/08/2023).
- [33] F. Ciccarello, G. M. Palma e V. Giovannetti. «Collision-model-based approach to non-Markovian quantum dynamics». Em: *Physical Review A* 87.4 (abr. de 2013). Publisher: American Physical Society, p. 040103. DOI: [10.1103/PhysRevA.87.040103](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.040103). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.040103> (acedido em 09/08/2023).
- [34] Steve Campbell et al. «System-environment correlations and Markovian embedding of quantum non-Markovian dynamics». Em: *Physical Review A* 98.1 (jul. de 2018). arXiv:1805.09626 [quant-ph], p. 012142. ISSN: 2469-9926, 2469-9934. DOI: [10.1103/PhysRevA.98.012142](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.012142). URL: <http://arxiv.org/abs/1805.09626> (acedido em 09/08/2023).
- [35] Gabriel T. Landi. *Melt!* <https://melt1.notion.site/>. URL: <https://melt1.notion.site/> (acedido em 15/07/2023).
- [36] R. Dum, P. Zoller e H. Ritsch. «Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission». Em: *Physical Review A* 45.7 (abr. de 1992). Publisher: American Physical Society, pp. 4879–4887. DOI: [10.1103/PhysRevA.45.4879](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.4879). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.4879> (acedido em 31/08/2023).
- [37] Klaus Mølmer e Yvan Castin. «Monte Carlo wavefunctions in quantum optics». en. Em: *Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B* 8.1 (fev. de 1996), p. 49. ISSN: 1355-5111. DOI: [10.1088/1355-5111/8/1/007](https://doi.org/10.1088/1355-5111/8/1/007). URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1355-5111/8/1/007> (acedido em 31/08/2023).
- [38] Gabriel T. Landi et al. «Flux rectification in the quantum X X Z chain». en. Em: *Physical Review E* 90.4 (out. de 2014), p. 042142. ISSN: 1539-3755, 1550-2376. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.042142](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.042142). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.042142> (acedido em 22/06/2022).
- [39] Rebecca Erbanni et al. *Simulating quantum transport via collisional models on a digital quantum computer*. arXiv:2307.13576 [cond-mat, physics:quant-ph]. Jul. de 2023. DOI: [10.48550/arXiv.2307.13576](https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.13576). URL: <http://arxiv.org/abs/2307.13576> (acedido em 27/07/2023).



- [40] Dragi Karevski e Thierry Platini. «Quantum Nonequilibrium Steady States Induced by Repeated Interactions». Em: *Physical Review Letters* 102.20 (mai. de 2009). Publisher: American Physical Society, p. 207207. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.207207](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.207207). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.207207> (acedido em 04/09/2023).
- [41] Gabriel T. Landi. *Patterns in the jump-channel statistics of open quantum systems*. arXiv:2305.07957 [cond-mat, physics:quant-ph]. Jun. de 2023. DOI: [10.48550/arXiv.2305.07957](https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.07957). URL: <http://arxiv.org/abs/2305.07957> (acedido em 15/11/2023).
- [42] A. Hofmann et al. «Measuring the Degeneracy of Discrete Energy Levels Using a GaAs / AlGaAs Quantum Dot». en. Em: *Physical Review Letters* 117.20 (nov. de 2016), p. 206803. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: [10.1103/PhysRevLett.117.206803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.206803). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.206803> (acedido em 01/04/2023).
- [43] J. M. Elzerman et al. «Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot». eng. Em: *Nature* 430.6998 (jul. de 2004), pp. 431–435. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature02693](https://doi.org/10.1038/nature02693).
- [44] Wei Lu et al. «Real-time detection of electron tunnelling in a quantum dot». en. Em: *Nature* 423.6938 (mai. de 2003). Number: 6938 Publisher: Nature Publishing Group, pp. 422–425. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature01642](https://doi.org/10.1038/nature01642). URL: <https://www.nature.com/articles/nature01642> (acedido em 06/12/2023).
- [45] Jonas Bylander, Tim Duty e Per Delsing. «Current measurement by real-time counting of single electrons». en. Em: *Nature* 434.7031 (mar. de 2005). Number: 7031 Publisher: Nature Publishing Group, pp. 361–364. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/nature03375](https://doi.org/10.1038/nature03375). URL: <https://www.nature.com/articles/nature03375> (acedido em 06/12/2023).
- [46] Pierre Rouchon e Jason F. Ralph. «Efficient quantum filtering for quantum feedback control». Em: *Phys. Rev. A* 91.1 (jan. de 2015). Publisher: American Physical Society, p. 012118. DOI: [10.1103/PhysRevA.91.012118](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.012118). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.012118>.
- [47] S. Haroche e J.M. Raimond. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2006. ISBN: 978-0-19-850914-1.
- [48] Jin Wang e H. M. Wiseman. «Feedback-stabilization of an arbitrary pure state of a two-level atom». Em: *Physical Review A* 64.6 (nov. de 2001). Publisher: American Physical Society, p. 063810. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.063810](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.063810). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.063810> (acedido em 03/02/2024).
- [49] Mark T. Mitchison, John Gould e Javier Prior. «Charging a quantum battery with linear feedback control». en. Em: *Quantum* 5 (jul. de 2021). arXiv:2012.00350 [cond-mat, physics:quant-ph], p. 500. ISSN: 2521-327X. DOI: [10.22331/q-2021-07-13-500](https://doi.org/10.22331/q-2021-07-13-500). URL: <http://arxiv.org/abs/2012.00350> (acedido em 03/02/2024).

- [50] Dariusz Chruściński et al. «How to design quantum-jump trajectories via distinct master equation representations». en-GB. Em: *Quantum* 6 (out. de 2022). Publisher: Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, p. 835. DOI: [10 . 22331 / q - 2022 - 10 - 13 - 835](https://doi.org/10.22331/q-2022-10-13-835). URL: [https : / / quantum - journal . org / papers / q - 2022 - 10 - 13 - 835 /](https://quantum-journal.org/papers/q-2022-10-13-835/) (acedido em 16/08/2023).