

Física 1 - 2020-1 - Noturno

Lista 5

Professores: Valentina Martelli e Gabriel Landi

Data de entrega: 09/06 (terça-feira)

Para a resolução da lista, deixe bem claro o ponto de partida; diga explicitamente como você interpretou do enunciado e/ou faça diagramas. Especifique sua escolha de referencial. Na hora de escrever a resposta, não se esqueça das unidades. E use algarismos significativos. Incentivamos que você discuta os problemas com seus colegas. Mas lembre-se: a redação final é *individual*. A entrega das listas (digitalizadas) é realizada diretamente enviando ao Professor/Professora responsável da sua turma.

1. (1 ponto) **Centro de massa:** Considere os sistemas da figura 1.

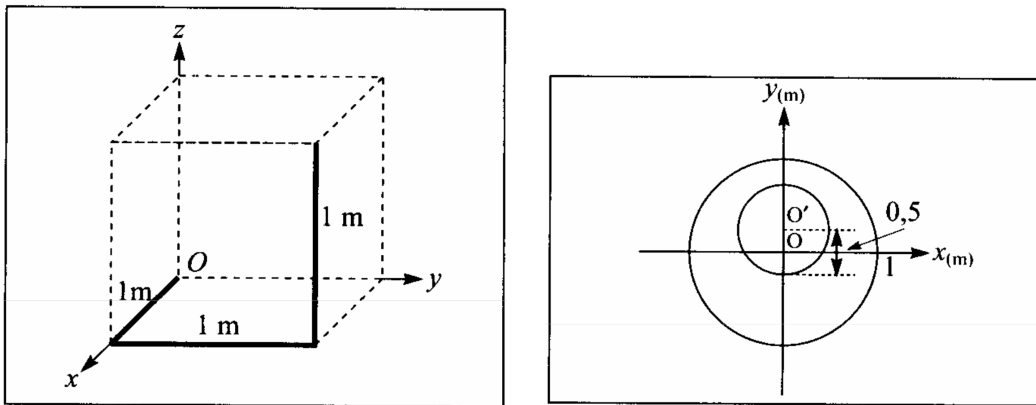


Figura 1

- (a) Calcule o centro de massa do sistema da figura da esquerda, composto de uma barra de densidade de massa uniforme e comprimento 3 m, dividido igualmente em três partes de 1 m cada.
- (b) Calcule o CM da figura da direita, composto de um disco maciço homogêneo circular, de raio 1 m, na qual foi removido um disquinho de 0,5 m de raio com uma separação de 0,25 m entre os centros O e O' .

Solução: (a) O CM de cada barra estará, por simetria, no centro do barra. Portanto, enumerando-as, teremos:

$$\mathbf{R}_1 = (L/2)\hat{i},$$

$$\mathbf{R}_2 = L\hat{i} + (L/2)\hat{j},$$

$$\mathbf{R}_3 = L\hat{i} + L\hat{j} + (L/2)\hat{k}.$$

As três barras possuem a mesma massa m . Portanto o CM será dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{m}{3m}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \\ &= \frac{5L}{6}\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j} + \frac{L}{6}\hat{k}.\end{aligned}$$

(b))

Se o disco não tivesse o buraco, seu CM seria na origem. Já o CM do disquinho que foi cavado será em

$$\mathbf{R}_{\text{disco}} = (0, 25 \text{ m})\hat{j}.$$

Além disso, se a massa do disco é M , a massa do disquinho será

$$m = M \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = M/4,$$

onde $R = 1 \text{ m}$ e $r = 1/2 \text{ m}$. Portanto, a CM do disco com o buraco tem que ser tal que, se adicionarmos o disquinho, obtemos um CM na origem. Ou seja,

$$0 = \frac{(M - m)\mathbf{R}_{\text{disco com buraco}} + m\mathbf{R}_{\text{disquinho}}}{M}.$$

Resolvendo para o CM do disco com buraco, obtemos então:

$$\mathbf{R}_{\text{disco com buraco}} = -\frac{m}{M - m}\mathbf{R}_{\text{disquinho}} = -\frac{1}{3}\mathbf{R}_{\text{disquinho}} = (-1/12 \text{ m})\hat{j}.$$

Ou seja, o CM está para baixo no eixo y .

2. **(1 ponto) Impulso:** Um jogador de futebol chuta uma bola de massa 0.45 kg , que estava inicialmente em repouso. O pé do jogador está em contato com a bola por $3.0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ e a força do chute pode ser descrita por:

$$\vec{F}(t) = [(6.0 \cdot 10^6)t - (2.0 \cdot 10^9)t^2]\hat{i}$$

expresso em unidades do SI, onde \hat{i} é o versor do eixo x paralelo ao solo. Determine:

- (a) O impulso do pé sobre a bola devido ao chute;
- (b) a força média exercida pelo jogador sobre a bola durante o contato;
- (c) a força máxima exercida pelo jogador sobre a bola durante o contato;
- (d) a velocidade da bola logo após perder contacto com o pé do jogador.

Solução: (a) A força atua ao longo do eixo x , então o movimento é unidimensional, pelo menos nos instantes próximos à colisão. O módulo do impulso é:

$$I = \int_0^{3.0 \cdot 10^{-3}} [(6.0 \cdot 10^6)t - (2.0 \cdot 10^9)t^2] dt = \left[\frac{1}{2}(6.0 \cdot 10^6)t^2 - \frac{1}{3}(2.0 \cdot 10^9)t^3 \right]_0^{3.0 \cdot 10^{-3}} = 9.0 \text{ N s}$$

(b) Podemos agora calcular a força média usando o impulso determinado em (a):

$$F_{\text{med}} = \frac{I}{\Delta} = \frac{9.0 \text{ N s}}{3.0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 3.0 \cdot 10^3 \text{ N}$$

(c) Para determinar a força máxima, temos que derivar a expressão da força e igualar a zero, para encontrar o instante onde a força é máxima:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [(6.0 \cdot 10^6)t - (2.0 \cdot 10^9)t^2] = (6.0 \cdot 10^6) - (4.0 \cdot 10^9)t = 0$$

$$\implies t^* = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 4.5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Substituindo na expressão da força:

$$F_{\text{max}} = F(t^*) = F(1.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}) = 4.5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

(d) A bola estava em repouso antes do chute, então a variação de momento linear dela logo depois de perder contacto com o pé será igual ao impulso:

$$v = \frac{\Delta P}{m} = \frac{I}{m} = \frac{9.0 \text{ N s}}{0.45 \text{ kg}} = 20 \text{ m/s}$$

3. **(1 ponto) Explosão:** Uma mina explode em três fragmentos de 100 g cada, que se deslocam num plano horizontal. Um deles para o oeste, um a 60° ao norte da direção leste e o outro a 30° ao sul da direção leste. A energia cinética total liberada pela explosão foi de 4000 J. Encontre a magnitude das velocidades iniciais dos três fragmentos imediatamente após a explosão.

Solução: Como a explosão envolve apenas forças internas, o momento total é conservado. Portanto, como a mina estava inicialmente em repouso e como todos os fragmentos tem a mesma massa, obtemos

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0.$$

Sabemos as direções. Só precisamos da magnitude das velocidades. Do enunciado:

$$\mathbf{v}_1 = -v_1\hat{i},$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2(\cos 60^\circ\hat{i} + \sin 60^\circ\hat{j}),$$

$$\mathbf{v}_3 = v_3(\cos 30^\circ\hat{i} - \sin 30^\circ\hat{j}).$$

Somando os três e igualando a zero obtemos:

$$v_1 = 2v_2 = \frac{2v_3}{\sqrt{3}}.$$

Para encontrarmos o valor de v_1 precisamos agora da informação sobre a energia liberada na explosão. A energia total liberada foi $K = 4000$ J, o que se converteu em energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{4}{3}mv_3^2.$$

Portanto,

$$v_3 = \sqrt{3000} = 173.21 \text{ m/s}.$$

Com isso ficam determinadas as três velocidades

$$v_1 = 200,0 \text{ m/s}, \quad v_2 = 100,0 \text{ m/s}, \quad v_3 = 173.21 \text{ m/s}.$$

4. **(1 ponto) Troca de momento entre dois patinadores:** Um patinador e uma patinadora estão se aproximando um do outro, deslizando sobre uma pista de gelo com atrito desprezível. Os dois patinadores se aproximam um do outro. Ela vem com velocidade $\mathbf{v}_1 = v_0(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$ e ele com $\mathbf{v} = v_0(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$ onde $v_0 = 0.5$ m/s e $\theta = 10^\circ$ (vide Fig. 2). A patinadora pesa 50 kg e carrega consigo uma bola de 1 kg, ao passo que o patinador pesa 51 kg. Antes de colidirem, ela joga a bola para ele, que a apanha. Em consequência, eles passam a se afastar um do outro. Observa-se que ela passa a se mover com velocidade $\mathbf{v}'_1 = v'_1(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$ onde $\theta = 10^\circ$, permanece o mesmo, mas $v'_1 = 0.51$ m/s.

- (a) Calcule o vetor velocidade do patinador depois de apanhar a bola.
 (b) Calcule o momento total transferido da patinadora ao patinador ao arremessar a bola.
 (c) Calcule o vetor velocidade com que a bola foi lançada.

O interessante desse problema é que, como você vai descobrir, o ato de arremessar a bola se comporta como uma força repulsiva entre os patinadores. É assim que as interações fundamentais na física de partícula são interpretadas: duas partículas interagem trocando uma terceira partícula entre elas.

Solução: (a) Por conservação do momento, devemos ter

$$(m_1 + \delta m)\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + (m_2 + \delta m)\mathbf{v}'_2,$$

onde $\delta m = 1$ kg é o peso da bola, $m_1 = 50$ kg e $m_2 = 51$ kg. Resolvendo para \mathbf{v}'_2 e substituindo os valores, obtemos

$$\mathbf{v}'_2 = (0.085\hat{i} + 0.483\hat{j}) \text{ m/s}.$$

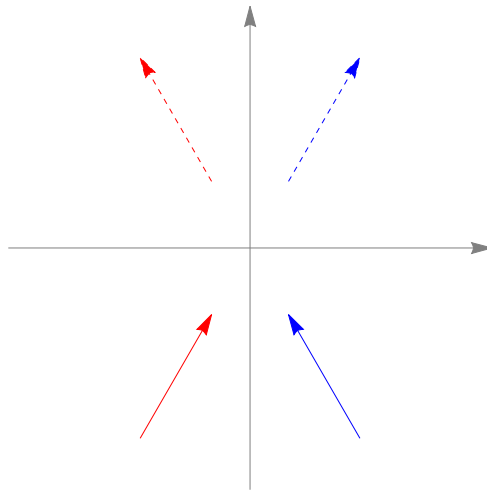


Figura 2

(b) Como o momento é conservado, o momento transferido pela patinadora é igual a variação do momento do patinador, que foi:

$$\Delta p_2 = (m_2 + \delta m)v_2' - m_2 v_2 = (8.856 \text{ kg m/s})\hat{i}.$$

Note como o momento transferido foi somente na direção x (vide Fig. 2).

(c) Para saber com que velocidade e direção a bola foi lançada, aplicamos a conservação do momento ao sistema “patinadora+bola”:

$$(m_1 + \delta m)v_1 = m_1 v_1' + \delta m v_{\text{bola}}.$$

Resolvendo para v_{bola} obtemos

$$v_{\text{bola}} = (8.856 \text{ m/s})\hat{i}.$$

Ou seja, a bola foi arremessada exclusivamente na direção x e foi isso que causou a variação do momento do patinador ser nessa direção.

5. **(1 ponto) Colisões múltiplas:** Uma partícula de massa m desloca-se com velocidade v em direção a duas outras partículas idênticas, com massas m' , em repouso e ligeiramente separadas. O arranjo é tal que as três estão alinhadas num mesmo eixo. Todas as colisões são elásticas.

- Mostre que para $m \leq m'$ haverá duas colisões e calcule as velocidades finais das três partículas.
- Mostre que para $m > m'$ haverá três colisões e calcule as velocidades finais das três partículas.
- Verifique que, no caso (a), o resultado para a primeira e a terceira partícula é o mesmo que se a partícula do meio não existisse.

Solução: Como as colisões são elásticas, haverá conservação tanto de momento quanto de energia cinética. Sejam v_1, v_2, v_3 as velocidades após a primeira colisão e v_1', v_2', v_3' as velocidades após a segunda. Na primeira colisão teremos:

$$mv = mv_1 + m'v_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m'v_2^2.$$

Resolvendo para v_1 e v_2 obtemos

$$v_1 = \left(\frac{m - m'}{m + m'}\right)v, \quad v_2 = \frac{2m}{m + m'}v.$$

Vemos, portanto, que o sinal da velocidade da partícula 1 depende da diferença $m - m'$. Se $m \leq m'$ o sentido da velocidade da partícula 1 vai se inverter depois da colisão e ela vai passar a se mover para trás. Caso contrário, ela vai se mover para frente, mas com velocidade menor que a partícula 2.

Em seguida analisamos a 2a colisão. Nesse caso teremos

$$m'v_2 = m'v'_2 + m'v'_3$$

$$\frac{1}{2}m'v_2^2 = \frac{1}{2}m'v'^2_2 + \frac{1}{2}m'v'^2_3.$$

Como as massas de 2 e 3 são iguais, segue destas equações portanto que teremos

$$v'_2 = 0, \quad v'_3 = v_2.$$

(a) Se $m \leq m'$ a massa 1 passará a se mover para trás após a primeira colisão. Como a massa 2 fica parada, elas nunca voltarão a colidir. Portanto haverá apenas 2 colisões.

(b) Se $m > m'$ a massa 1 continua se movendo para frente, ao passo que a massa 2 fica parada. Portanto em algum momento elas vão se colidir novamente e haverá, no total, 3 colisões.

(c) No caso (a) a partícula 2 ficou parada enquanto que a partícula 3 saiu com velocidade v_2 ; ou seja, com a velocidade que a partícula 2 ganhou após a colisão. Portanto, temos um cenário idêntico ao da primeira colisão, com a partícula 1 andando para trás e a 3 se movendo para frente com velocidade v_2 . É como se a partícula 2 não estivesse presente.

6. **(0,5 ponto) Balança dinâmica:** Uma arma dispara horizontalmente uma sequência de bolinhas, cada uma de 0,5 g, a uma taxa de 100 bolinhas/segundo (figura 3). Elas caem de uma altura de 0,5 m sobre um prato de uma balança, onde elas colidem elasticamente e sobem novamente até a altura inicial. Qual massa deve ser colocada no outro prato da balança para manter o equilíbrio?

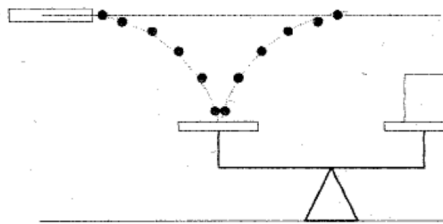


Figura 3

Solução:

A velocidade vertical de cada bolinha quando atinge o prato será $v = \sqrt{2gh}$, onde $h = 0,5$ m. Como as bolinhas sobem até a mesma altura a colisão deverá ser elástica. Portanto o momento transferido em cada colisão será $\Delta p = 2mv$. Pelo teorema do impulso, como temos $\lambda = 100$ bolinhas por segundo colidindo com o prato, a força será $F = \lambda\Delta p$. No outro prato precisamos portanto colocar uma massa M tal que $Mg = F$. Ou seja,

$$M = \frac{\lambda\Delta p}{g} = 31,94\text{g}.$$

7. **(0,5 ponto) :** Um bloco sobre um piso horizontal explode em dois pedaços que se movem ao longo do eixo x . Suponha que o bloco e os dois pedaços formem um sistema fechado e isolado. A figura 4 mostra seis possibilidades para o gráfico dos momentos do bloco e dos pedaços em função do tempo t . Quais dos gráficos pode representar corretamente a situação? Justifique a sua resposta.

Solução: A conservação do momento linear do sistema implica que o momento linear antes e depois da explosão tem que ser conservado. Nas situações a , c , e , f , a soma dos momentos das partículas depois da explosão não coincide com o momento antes. Portanto, os gráficos que podem representar a situação descrita são b e d .

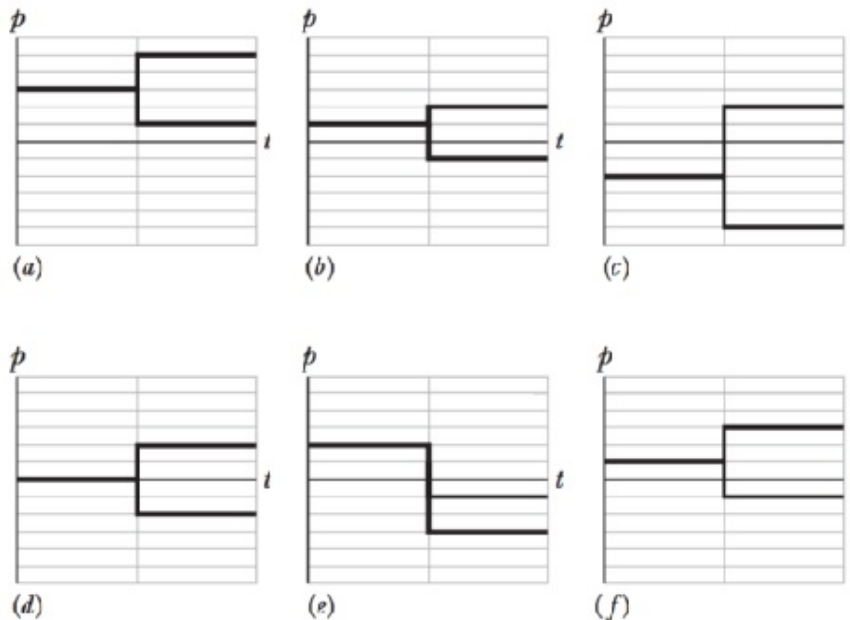


Figura 4

8. (1 ponto) Coeficiente de restituição e :

- (a) O coeficiente de restituição e de aço com aço pode ser medido deixando uma esfera de aço cair sobre uma placa de aço fixada rigidamente à terra. Se a bola cai de uma altura de 3m e em seguida sobe 2,5 m, qual o coeficiente de restituição?
- (b) De acordo com as regras do squash, uma bola aceitável para o torneio deve recuar entre 173 e 183 cm quando solta de uma altura de 254 cm. Calcule o range de valores aceitáveis para o coeficiente de restituição dessa bola.
- (c) Um objeto de 2 kg se movendo a 6 m/s colide com um objeto de 4 kg inicialmente em repouso. Na colisão o objeto de 2 kg é refletido e depois passa a se mover para trás com 1 m/s. Calcule a energia cinética perdida no processo e o coeficiente de restituição.

Solução: O coeficiente de restituição é dado por

$$e = - \left(\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \right).$$

(a) A placa está em repouso enquanto que a velocidade de aproximação da bola será $v_{2i} = \sqrt{2gh_i} = 7,67$ m/s, onde $h_i = 3$ m é a altura inicial. Já a velocidade de recuo será, em módulo $v_{2f} = \sqrt{2gh_f} = 7$ m/s. Portanto o coeficiente de restituição será

$$e = \sqrt{h_f/h_i} = 0,912.$$

(b) O procedimento é análogo ao do item (a), exceto que temos que considerar agora os dois limites.

$$h_f = 173 \text{ cm} : \quad e = \sqrt{h_f/h_i} = 0,825,$$

$$h_f = 183 \text{ cm} : \quad e = \sqrt{h_f/h_i} = 0,849.$$

Portanto, o coeficiente de restituição da bola deve estar entre 0,825 e 0,849.

(c) Primeiro calculamos a velocidade final da massa de 4 kg, usando conservação do momento:

$$v_{2f} = (m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f})/m_2 = 3,5 \text{ m/s.}$$

A energia cinética inicial era

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = 36 \text{ J,}$$

ao passo que a energia cinética final será

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = 25,5 \text{ J.}$$

Portanto, a energia cinética perdida foi $\Delta K = 10,5 \text{ J}$. O coeficiente de restituição será

$$e = - \left(\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \right) = 0,75.$$

9. (1 ponto) **Lançamento de foguetes:** Um foguete tem massa inicial de 30000 kg, da qual 80% é combustível. O combustível é queimado a uma taxa de 200 kg/s e expõe o seu gás uma velocidade relativa de 1,8 km/s. Encontre:

- A força de empuxo produzida sob o foguete.
- O tempo até o combustível acabar.
- A velocidade do foguete no instante em que o combustível acaba (assumindo que o movimento é puramente vertical e a aceleração da gravidade é constante, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).
- Calcule a *razão empuxo/peso* definida como $\tau_0 = F_{\text{em}}/M_0 g$, onde F_{em} é a força de empuxo do item (a) e M_0 é a massa do foguete no instante $t = 0$.
- Mostre, sem substituir os valores numéricos dados no enunciado, que $\tau_0 = 1 + a_0/g$, onde a_0 é a aceleração inicial do foguete. O peso que um astronauta sente no instante inicial do lançamento será $mg + ma_0 = mg\tau_0$, onde m é a massa do astronauta. É por esse motivo que τ_0 é importante. Não é possível, por exemplo, usar um valor de τ_0 muito maior do que 4 para garantir a segurança dos astronautas.

Solução: (a) A força de empuxo será

$$F_{\text{em}} = R v_{\text{ex}} = (200 \text{ kg/s}) \times (1,8 \text{ km/s}) = 3,6 \times 10^5 \text{ N.}$$

(b) A massa em função do tempo é dada por $M = M_0 - Rt$. Da massa total, 80% é combustível. Portanto, o combustível vai acabar quando $Rt = 0,8M_0$. Ou seja,

$$t_{\text{até acabar}} = \frac{0,8M_0}{R} = 120 \text{ s.}$$

(c) A velocidade do foguete em função do tempo ao longo do eixo y é dada pela equação:

$$v_y = v_{\text{ex}} \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - Rt} \right) - gt,$$

Usando o resultando do item (b) obtemos então

$$v(t_{\text{até acabar}}) = 1721 \text{ m/s.}$$

(d) Usando o resultados do item (a) obtemos

$$\tau_0 = \frac{F_{\text{em}}}{M_0 g} = 1,22.$$

(e) Partimos da equação diferencial para a componente y da velocidade,

$$M(t) \frac{dv_y}{dt} = F_{em} - M(t)g,$$

Definimos $a_0 = \frac{dv_y}{dt}$ no instante t_0 . Nesse caso $M(t) = M_0$ e portanto obtemos

$$M_0 a_0 = F_{em} - M_0 g = M_0 g \tau_0 - M_0 g.$$

Portanto, resolvendo para τ_0 obtemos

$$\tau_0 = 1 + a_0/g.$$

10. **(1 ponto) Colisão 2D:** Um partícula de velocidade inicial v_0 colide com outra, de mesma massa, inicialmente em repouso. Devido à colisão, a primeira partícula é defletida de um ângulo ϕ e sai com velocidade final v . Já a segunda partícula é defletida de um ângulo θ . A colisão não necessariamente é elástica.

(a) Mostre que

$$\tan \theta = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi}.$$

- (b) Como as massas são iguais, quando a colisão for elástica o ângulo formado entre as velocidades finais será de 90° . Ou seja, $\phi + \theta = \pi/2$. Mostre, usando os resultados do item (a), que isso implica na relação $v = v_0 \cos \phi$.
- (c) Suponha agora que $m = 5\text{kg}$ e $v_0 = 2\text{ m/s}$. Além disso, suponha que a 1a partícula é defletida de um ângulo $\phi = 30^\circ$ e a segunda de $\theta = 60^\circ$. A colisão foi elástica?

Solução: (a) A colisão não necessariamente é elástica. Portanto, vale apenas conservação de momento. Olhando para as componentes x e y temos

$$v_0 = v \cos \phi + v_2 \cos \theta,$$

$$0 = v \sin \theta - v_2 \sin \theta,$$

onde v_2 é a velocidade final da segunda partícula. Resolvendo a 2a equação para v_2 obtemos $v_2 = v \sin \theta / \sin \theta$. Substituindo na 1a e resolvendo para θ , obtemos então

$$\tan \theta = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi}.$$

(b) No caso de colisões elásticas $\theta = \pi/2 - \phi$. Nesse caso obtemos $\tan(\theta) = \cot(\phi)$. Portanto, o resultado do item (a) se torna,

$$\frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi}.$$

Resolvendo para v obtemos

$$v = v_0 \cos \phi.$$

(c) Sim, pois o ângulo entre elas foi de 90° .

11. **(1 ponto):** Um carrinho brinquedo de massa 5 kg move se ao longo do eixo x ; a figura 5 representa a força atuando sobre o carrinho, que começa a se mover do repouso no instante $t = 0$. O valor F_{x_s} no gráfico corresponde à 5.0 N .

- (a) Determine o momento linear \vec{p} no instante 4.0 s ;
(b) Determine o momento linear \vec{p} no instante 7.0 s ;
(c) Determine a velocidade \vec{v} no instante 9.0 s ;

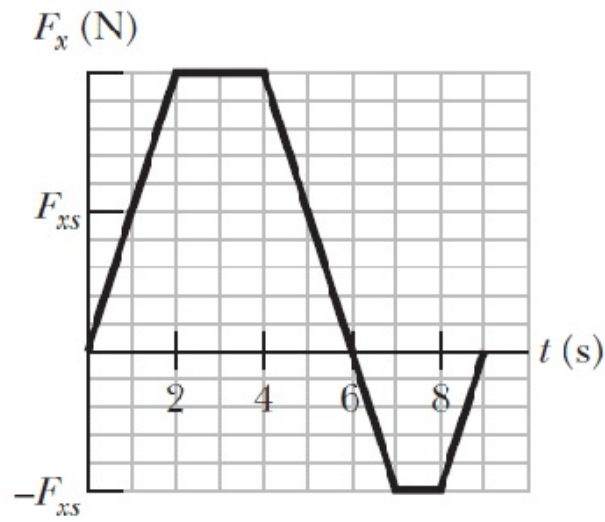


Figura 5

Solução: (a) Pelo teorema do impulso, a variação de momento linear pode ser determinada como a área sob a curva $\vec{F}(t)$. Então

$$I(0 - 4 \text{ s}) = 30 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies \vec{p} = 30 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i}$$

(b) Lembrando que as áreas de baixo do eixo x contribuem negativamente, obtemos:

$$I(0 - 7 \text{ s}) = 38 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies \vec{p} = 38 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i}$$

(c) Para determinar a velocidade, determinamos primeiro a variação do momento linear como nos pontos anteriores:

$$I(0 - 9 \text{ s}) = 30 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies \vec{p} = 30 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i} \implies \vec{v} = \frac{30 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i}}{5 \text{ kg}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i}$$